Untersuchung isotroper und anisotroper Medien durch Reflexion der Lummerschen Doppelringe.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

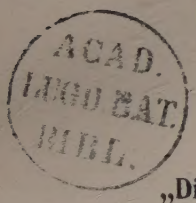
der hohen

Philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht von

Hans Schulz.



Freitag, den 7. Februar mittags 1 Uhr

in der Aula Leopoldina

VORTRAG:

„Die Bedeutung des Begriffs der Resonanz"

und

Promotion.

Breslau 1908

Druck von Grass, Barth & Comp. (W. Friedrich)

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät
der Kgl. Universität Breslau.

Referenten: Professor Dr. **Lummer** und Professor Dr. **Pringsheim.**

Termin der mündlichen Prüfung: 7. Dezember 1907.

Herrn Professor Dr. O. Lummer

aus Dankbarkeit.

Untersuchung isotroper und anisotroper Medien durch Reflexion der Lummerschen Doppelringe.

§ 1.

Übersicht der bisherigen Resultate.

Läßt man einen Strahl homogenen Lichtes auf eine planparallele Platte fallen, so entstehen aus ihm durch vielfache Reflexionen die Strahlen 1, 2, 3 .... (vgl. Fig. 2). Vereinigt man diese durch eine Linse, so werden sie in der Brennebene interferieren, da sie, aus einem Strahl hervorgegangen, kohärent sind. Benutzt man eine ausgedehnte Lichtquelle, so fallen Strahlen aller möglichen Neigungen auf die Platte. Jedem Einfallswinkel entspricht eine bestimmte Gangdifferenz; je nach deren Grösse findet Verstärkung oder Schwächung statt, und es erscheint in der Brennebene ein System dunkler Streifen. Bei senkrechter Incidenz sind die Interferenzstreifen kreisförmig (Haidinger-Lummersche Ringe), während bei schiefem Einfall nur Teile von Kreisen sichtbar werden. Der Intensitätsabfall vom Maximum zum Minimum ist dabei im allgemeinen sinusförmig. Nur wenn die Intensität der mehrfach reflektierten Büschel groß genug ist, daß auch sie einen merkbaren Einfluß auf das Phänomen ausüben, erhält man scharf begrenzte Streifen.

Die Mitwirkung dieser Büschel läßt sich auf zwei Wegen erreichen. Perot und Fabry benutzten durchsichtig versilberte Glasplatten und erhielten so die gewünschte Schärfe der Interferenzstreifen; Lummer läßt bei seinem Interferenzspektroskop das Licht streifend auffallen. Die größte, praktisch erreichbare Schärfe, von Lummer die „Airysche Schärfe“ genannt, erhält man, wenn man die Interferenzstreifen an einer dünnen Luftplatte in Glas nahe der Grenze der Totalreflexion erzeugt. Hier können die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten $\sigma_{\shortparallel}$ und $\sigma_{\perp}$ ihren größten Wert in der Tat erreichen und gleichzeitig erhält man, wenn man die Luftplatte dünn genug wählt, die Mitwirkung sehr vieler, mehrfach reflektierter Büschel.

Löscht man durch eine vorgesetzte Blende den Strahl 1 und 2 vollkommen aus, so ändert sich das Aussehen des Phänomens. Statt der dunklen Streifen auf hellem Grunde erhält man die doppelte Anzahl heller Streifen auf dunklem Grunde; dies kommt dadurch zustande, daß sich zwischen je zwei dunklen Interferenzstreifen ein neues, breites Minimum einschiebt[1]). Fällt linearpolarisiertes Licht auf, so sind die reflektierten Büschel annähernd linear polarisiert; aber die Schwingungsebene jedes einzelnen Büschels ist gegen diejenige der einfallenden Welle verschieden gedreht. Dadurch ist es möglich, bei Einschaltung eines Nicolschen Prismas als Analysator nach Belieben je ein Büschel auszulöschen. Bei Drehung des Nicolschen Prismas wird nacheinander je ein Büschel der Mitwirkung entzogen und je nach Stellung des Analysators wird das einfache oder das Lummersche Doppelphänomen zu beobachten sein, wie Fig. 1 zeigt. Diese Figur ist aus der Abhandlung von Prof. Lummer: „Die Interferenzkurven gleicher Neigung im polarisierten Licht“[2]) entnommen und gibt das Aussehen des Interferenzphänomens für verschiedene

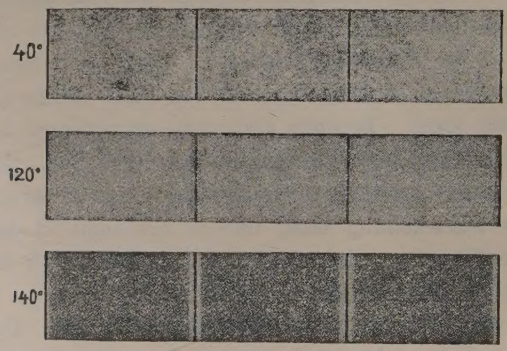


Fig. 1.

Lagen des Analysators (40°, 120°, 140°). In der eben erwähnten Abhandlung hat Herr Prof. Lummer darauf hingewiesen, daß durch diese Interferenzkurven gleicher Neigung im polarisierten Lichte (Lummersche Doppelringe) ein Mittel gegeben sei, um Amplituden- und Phasenänderungen bei Reflexion festzustellen, bezw. zu messen.

In der Tat, läßt man die vom Würfel kommenden Büschel an einer ebenen Fläche reflektieren, so findet eine Änderung der Amplituden statt und zwar werden die parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten verschieden geschwächt. Hierdurch wird eine Drehung der Polarisationsebene hervorgerufen und es wird, gegenüber dem direkt betrachteten Doppelphänomen, eine Änderung der Erscheinung eintreten,

---

[1]) O. Lummer, Sitzungsber. d. Kgl. preuss. Akad. d. Wiss. XXIV. S. 504. 1900.
[2]) O. Lummer, Ann. d. Phys. 23. S. 49—63, 1907.

welche dadurch kompensiert werden kann, daß der Analysator um den gleichen Betrag gedreht wird.

Auf Anregung des Herrn Prof. Lummer wurde in vorliegender Arbeit die Anwendungsmöglichkeit dieses Prinzips untersucht. Zu diesem Zwecke mußte zunächst eine erweiterte Theorie der Kurven gleicher Neigung gegeben werden, d. h. der Einfluß von Amplituden- und Phasenänderungen auf den Charakter und die Lage der Streifen festgestellt und die theoretischen Ergebnisse mit der Beobachtung verglichen werden.

I. Theorie.

§ 2.

Einfluß der Amplitudenänderung.

Der Schwingungszustand einer linearpolarisierten Welle, deren Wellenlänge λ ist, läßt sich darstellen durch den Ausdruck

$$a \sin 2\pi \left(\frac{\varrho}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) = a \sin \left(2\pi \frac{\varrho}{\lambda} + \varphi\right) = a \sin X,$$

wo a die Amplitude und φ die Phase der Schwingung bezeichnet. Fällt diese Welle auf eine planparallele Platte von der Dicke D mit dem Brechungsquotienten n, so wird, falls das Polarisationsazimut gegen die Einfallsebene α ist, der Schwingungszustand der erzeugten Teilwellen 1, 2, 3 .... (Fig. 2) gegeben sein durch:

I.	$a\,\sigma_\perp \cos\alpha \,.\, \sin X$	$a\,\sigma_{''} \sin\alpha \,.\, \sin X,$
II.	$a\,s_\perp\,\sigma_\perp'\,s_\perp' \cos\alpha \,.\, \sin(X+\beta)$	$a\,s_{''}\,\sigma_{''}'\,s_{''}' \sin\alpha \,.\, \sin(X+\beta),$
III.	$a\,s_\perp\,\sigma_\perp'^{\,3} s_\perp' \cos\alpha \,.\, \sin(X+2\beta)$	$a\,s_{''}\,\sigma_{''}'^{\,3} s_{''}' \sin\alpha \,.\, \sin(X+2\beta),$
	.....	.....

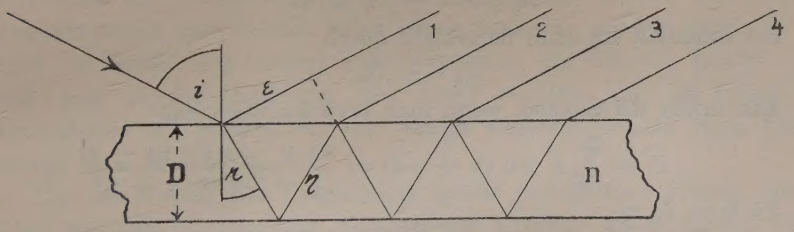


Fig. 2.

wo β durch den Gangunterschied der Teilwellen bestimmt ist.

$$\beta = 2\pi \frac{2\,n\,\eta - \varepsilon}{\lambda} = \frac{4\,\pi\,n\,D\cos r}{\lambda}$$

$\sigma_{''}$, $\sigma_\perp$, $s_{''}$ und $s_\perp$ sind die durch die Fresnelschen Formeln gegebenen Änderungen der Amplituden bei äusserer Reflexion und bei Eintritt in die Platte, $\sigma_{''}'$, $\sigma_\perp'$, $s_{''}'$, $s_\perp'$ die entsprechenden Werte für innere Reflexion und bei Austritt aus der Platte. Ist i der Einfallswinkel, r der Brechungswinkel, so sind $\sigma_{''}$ und $\sigma_\perp$ gegeben durch

1) $$\sigma_{''} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}; \qquad \sigma_\perp = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}.$$

Für eine planparallele Platte gelten nun noch die Beziehungen:

2) $$\sigma_{\parallel}' = -\sigma_{\parallel}; \qquad \sigma_{\perp}' = -\sigma_{\perp}.$$
$$s_{\parallel}\, s_{\parallel}' = 1 - \sigma_{\parallel}^2; \quad s_{\perp}\, s_{\perp}' = 1 - \sigma_{\perp}^2.$$

Die Amplituden der Teilwellen mögen jetzt in ihrer Grösse durch irgend welchen Einfluß geändert werden (etwa durch Reflexion) und die Schwächung der parallel bezw. senkrecht zur Einfallsebene der Platte schwingenden Komponente möge durch $\varrho_{\parallel}$ bezw. $\varrho_{\perp}$ bezeichnet werden. Dann folgt:

I.	$a\,\sigma_{\perp}\,\varrho_{\perp}\cos\alpha\,.\sin X$	$a\,\sigma_{\parallel}\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha\,.\sin X,$
II.	$a\,s_{\perp}\,\sigma_{\perp}'\,s_{\perp}'\,\varrho_{\perp}\cos\alpha\,.\sin(X+\beta)$	$a\,s_{\parallel}\,\sigma_{\parallel}'\,s_{\parallel}'\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha\,.\sin(X+\beta),$
III.	$a\,s_{\perp}\,\sigma_{\perp}'^{\,3}s_{\perp}'\,\varrho_{\perp}\cos\alpha\,.\sin(X+2\beta)$	$a\,s_{\parallel}\,\sigma_{\parallel}'^{\,3}s_{\parallel}'\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha\,.\sin(X+2\beta),$
	.....	.....

Diese Komponenten sind ihrer Natur nach, da sie aus einem Strahl hervorgegangen sind, kohärent. Um aber Interferenz zu ermöglichen, ist es nötig, sie auf auf die gleiche Schwingungsrichtung zu bringen. Läßt man sie zu diesem Zwecke einen Analysator passieren, dessen Schwingungsrichtung mit der Einfallsebene der Platte den Winkel ϑ bildet, so ergibt sich

I.	$a\,\sigma_{\perp}\,\varrho_{\perp}\cos\alpha\,.\cos\vartheta\,.\sin X$	$a\,\sigma_{\parallel}\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha\,.\sin\vartheta\,.\sin X,$
II.	$a\,s_{\perp}\sigma_{\perp}'\,s_{\perp}'\,\varrho_{\perp}\cos\alpha.\cos\vartheta.\sin(X+\beta)$	$a\,s_{\parallel}\,\sigma_{\parallel}'\,s_{\parallel}'\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha.\sin\vartheta.\sin(X+\beta),$
III.	$a s_{\perp}\sigma_{\perp}'^{3}s_{\perp}'\varrho_{\perp}\cos\alpha.\cos\vartheta.\sin(X+2\beta),$	$a s_{\parallel}\sigma_{\parallel}'^{3}s_{\parallel}'\varrho_{\parallel}\sin\alpha.\sin\vartheta.\sin(X+2\beta).$
	.....	.....

Um die Gesamtintensität zu berechnen, müssen diese Ausdrücke addiert und die Summe auf die Form gebracht werden

$$A_0 \sin X + B_0 \cos X.$$

Die Intensität ist dann dargestellt durch

$$A_0^2 + B_0^2.$$

Man erhält die Summe, wenn man berücksichtigt, daß

3) $$S = \sum_{p=0}^{\infty} y^p \sin(\mu + p\,\nu) = \frac{\sin\mu - y\sin(\mu-\nu)}{1 - 2\,y\cos\nu + y^2}$$

ist. Es folgt dann:

$$A_0 \sin X + B_0 \cos X =$$

$$a\,\varrho_{\perp}\cos\alpha\,.\cos\vartheta\left[\sigma_{\perp}\sin X + \frac{s_{\perp}\,s_{\perp}'}{\sigma_{\perp}'}\sum_0^{\infty}\sigma_{\perp}'^{\,2p}\sin(X+p\,\beta) - \frac{s_{\perp}\,s_{\perp}'}{\varrho_{\perp}'}\sin X\right]$$

$$+a\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha\,.\sin\vartheta\left[\sigma_{\parallel}\sin X + \frac{s_{\parallel}\,s_{\parallel}'}{\sigma_{\parallel}'}\sum_0^{\infty}\sigma_{\parallel}'^{\,2p}\sin(X+p\,\beta) - \frac{s_{\parallel}\,s_{\parallel}'}{\varrho_{\parallel}'}\sin X\right]$$

Mit Berücksichtigung der Beziehungen 2) erhält man

$$A_0 = a\,\varrho_{\perp}\cos\alpha\,.\cos\vartheta\,\frac{2\,\sigma_{\perp}(1+\sigma_{\perp}^2)\sin{}^2\beta/_2}{1 - 2\sigma_{\perp}^2\cos\beta + \sigma_{\perp}^4}$$

$$+\,a\,\varrho_{\parallel}\sin\alpha\,.\sin\vartheta\,\frac{2\,\sigma_{\parallel}(1+\sigma_{\parallel}^2)\sin{}^2\beta/_2}{1 - 2\sigma_{\parallel}^2\cos\beta + \sigma_{\parallel}^4}$$

$$B_0 = a\,\varrho_\perp \cos\alpha \,.\, \cos\partial \,\frac{.\,\sin\beta\,\sigma_\perp\,(1-\sigma_\perp{}^2)}{1-2\,\sigma_\perp{}^2\cos\beta+\sigma_\perp{}^4}$$

$$+\,a\,\varrho_{''}\sin\alpha\,.\,\sin\partial\,\frac{.\,\sin\beta\,\sigma_{''}\,(1-\sigma_{''}{}^2)}{1-2\sigma_{''}{}^2\cos\beta+\sigma_{''}{}^4}$$

Führt man die abkürzenden Bezeichnungen ein

4)
$$\begin{cases} M_\perp = \varrho_\perp \cos\alpha \,.\, \cos\partial \\ M_{''} = \varrho_{''} \sin\alpha \,.\, \sin\partial \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} A_\perp = \dfrac{a\,.\,2\,\sigma_\perp\,(1+\sigma_\perp{}^2)\,\sin{}^2\beta/_2}{1-2\,\sigma_\perp{}^2\cos\beta+\sigma_\perp{}^4} \\ B_\perp = \dfrac{a\,.\,\sigma_\perp\,(1-\sigma_\perp{}^2)\,\sin\beta}{1-2\,\sigma_\perp{}^2\cos\beta+\sigma_\perp{}^4} \end{cases}$$

und definiert analog $A_{''}$ und $B_{''}$, so ergibt sich für die Intensität, welche durch die Gesamtheit aller reflektierten Einzelwellen erzeugt wird

6) $$J = M_\perp{}^2\,(A_\perp{}^2+B_\perp{}^2) + M_{''}{}^2\,(A_{''}{}^2+B_{''}{}^2) + 2\,M_\perp M_{''}\,(A_\perp A_{''}+B_\perp B_{''}).$$
$1-\infty$

Dieser Ausdruck gibt die Abhängigkeit der Intensität vom Einfallswinkel der Strahlen an der planparallelen Platte wieder. Es variieren dabei, wenn die Amplitudenänderungen $\varrho_\perp$ und $\varrho_{''}$ konstant gesetzt werden, $\sigma_{''}$, $\sigma_\perp$ und β. Um die Erscheinung in aller Strenge darzustellen, müßten für jeden Einfallswinkel die entsprechenden Werte $\sigma_{''}$, $\sigma_\perp$ und β bestimmt werden.

Ketteler[1]) hat für einen einfachen Fall diese Rechnung durchgeführt. Es zeigt sich, daß die Intensitätsverteilung bei einem ausgedehnten Bilde inbezug auf die Streifen unsymmetrisch ist. Wesentlich vereinfacht wird die Berechnung, wenn man annimmt, daß für geringe Variation des Einfallswinkels die Fresnelschen Koeffizienten konstant bleiben und nur der Gangunterschied der vielfach reflektierten Strahlen, gegeben durch β, von Stelle zu Stelle sich ändert. Die Divergenz der Büschel beträgt nun, wenn man in der Umgebung des ersten Streifens von der Grenze der Totalreflexion ab beobachtet, nur wenige Minuten, so daß diese Vereinfachung wohl erlaubt ist.

Um den Verlauf der Erscheinung besser verfolgen zu können, mögen einige Beispiele zahlenmäßig durchgeführt werden. Da nach dem Helmholtzschen Reciprocitätssatz ein Lichtstrahl, der den gleichen Weg in entgegengesetzter Richtung durchläuft, die gleichen Veränderungen seiner Amplituden erleidet, so ist es erlaubt, an Stelle der planparallelen Luftplatte, die sich innerhalb einer Glasmasse vom Brechungsquotienten n befindet, eine Glasplatte gleicher Dicke vom Brechungsquotienten n in Luft anzunehmen. Nur müssen die Einfallswinkel in entsprechender Weise geändert werden.

Der Brechungsindex der planparallelen Platte sei $n = 1{,}52$, der Einfallswinkel $i = 89^0\ 30'$. Denkt man sich die Amplitudenänderung

[1]) E. Ketteler, Wied. Ann. **33**, S. 364. 1888.

dadurch hervorgerufen, daß die vom Würfel kommenden Bündel an einer Glasfläche vom Brechungsquotienten $n' = 1{,}5$ gespiegelt werden, so folgen, wenn die Amplitude der einfallenden Welle $a = 1$ gesetzt wird, für die mit dem Einfallswinkel i_2 an der Glasplatte variierende Intensitätsverteilung die in den Tabellen gegebenen Werte. (Die Stellung des Polarisators wurde hier $\alpha = 45^0$ angenommen. Für gegebenes n und i wird bei diesem Wert die Intensitätsverteilung am vorteilhaftesten, d. h. die Streifen werden am schärfsten.[1])

$i_2 = 10^0$

sin β/2	J für $\vartheta = 0^0$	J für $\vartheta = 45^0$	J für $\vartheta = 90^0$	J für $\vartheta = 135^0$
0	0	0	0	0
0,01	0,00143	0,0010	0,0062	0,0067
0,02	0,00468	0,0027	0,0132	0,0171
0,03	0,00808	0,0017	0,0166	0,0230
0,05	0,0128	0,0011	0,0191	0,0308
0,1	0,0170	0,0004	0,0202	0,0370
0,2	0,0186	0,0002	0,0203	0,0392
0,3	0,0190	0,00005	0,0203	0,0397
0,4	0,0191	0,00003	0,0203	0,0399
0,5	0,0191	0,00003	0,0203	0,0399
0,6	0,0192	0,00001	0,0203	0,0399
0,7	0,0192	0,00001	0,0203	0,0400
0,8	0,0192	—	0,0203	0,0400
0,9	0,0192	—	0,0203	0,0400
1	0,0192	—	0,0203	0,0400

$i_2 = 60^0$

sin β/2	J für $\vartheta = 0^0$	J für $\vartheta = 45^0$	J für $\vartheta = 90^0$	J für $\vartheta = 135^0$
0	0	0	0	0
0,01	0,00048	0,0171	0,0264	0,0098
0,02	0,00158	0,0372	0,0556	0,0200
0,03	0,00273	0,0491	0,0798	0,0235
0,05	0,00432	0,0603	0,0806	0,0267
0,1	0,00573	0,0678	0,0860	0,0240
0,2	0,00628	0,0703	0,0876	0,0237
0,3	0,00638	0,0707	0,0876	0,0233
0,4	0,00643	0,0709	0,0878	0,0233
0,5	0,00644	0,0709	0,0878	0,0233
0,6	0,00645	0,0711	0,0880	0,0233
0,7	0,00646	0,0711	0,0880	0,0233
0,8	0,00646	0,0711	0,0880	0,0233
0,9	0,00647	0,0711	0,0880	0,0233
1	0,00647	0,0711	0,0880	0,0233

[1]) Vgl. O. Lummer, Ann. d. Phys. **22**, S. 62, 1907.

$i_2 = 85^0$

$\sin \beta/2$	J für $\vartheta = 0^0$	J für $\vartheta = 45^0$	J für $\vartheta = 90^0$	J für $\vartheta = 135^0$
0	0	0	0	0
0,01	0,0184	0,107	0,110	0,021
0,02	0,0602	0,255	0,232	0,038
0,03	0,1040	0,359	0,292	0,037
0,05	0,1646	0,473	0,336	0,027
0,1	0,218	0,563	0,358	0,013
0,2	0,239	0,595	0,364	0,009
0,3	0,243	0,602	0,365	0,007
0,4	0,246	0,605	0,366	0,007
0,5	0,246	0,606	0,366	0,006
0,6	0,246	0,606	0,366	0,006
0,7	0,246	0,607	0,366	0,005
0,8	0,247	0,607	0,366	0,005
0,9	0,247	0,607	0,366	0,005
1	0,247	0,607	0,366	0,005

In den Tabellen sind die Zahlen, bei denen die Intensität ein Maximum durchschreitet, wo also eine Verdopplung der Streifenanzahl und damit das Lummersche Doppelphänomen eintritt, durch Unterstreichen hervorgehoben.

Die Tabellen sind in Tafel I, 1, 2, 3 graphisch dargestellt. Dabei sind für 1) und 2) die Ordinaten in 10fach so großem Maßstabe aufgetragen wie für 3).

Man sieht zunächst, daß die Intensität bei der Verdopplung mit wachsendem Einfallswinkel i_2 zunimmt und daß auch die Analysatorstellung, bei der das Doppelphänomen eintritt, vom Einfallswinkel abhängig ist. Bei dem Doppelphänomen werden sich die Maxima um so besser abheben, je dunkler die Minima sind. Als „maximale Sichtbarkeit" der Verdopplung definiere ich die Konstellation, bei welcher die Minima vollständige werden, d. h. bei welcher für $\beta/2 = 90^0$ der Wert der Intensität verschwindet.

Die Bedingung hierfür lautet:

$$\varrho_\perp{}^2 \cos{}^2\alpha \cdot \cos{}^2\vartheta\,(A_\perp{}^2 + B_\perp{}^2) + \varrho_\parallel{}^2 \sin{}^2\alpha \cdot \sin{}^2\vartheta\,(A_\parallel{}^2 + B_\parallel{}^2) + 2\varrho_\perp\varrho_\parallel \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta\,(A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel) = 0.$$

Für $\beta/2 = 90^0$ verschwindet sowohl $B_\perp$ als auch $B_\parallel$; man erhält also:

$$\varrho_\perp \cos\alpha \cdot \cos\vartheta \cdot A_\perp + \varrho_\parallel \sin\alpha \cdot \sin\vartheta \cdot A_\parallel = 0$$

oder

7) $$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{A_\perp}{A_\parallel}$$

Stellt man $A_\perp$ und $A_\parallel$ durch $\sigma_\perp$ und $\sigma_\parallel$ dar, so folgt:

7a) $$\operatorname{tg}\partial = -\frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \operatorname{ctg}\,\alpha \cdot \frac{\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \cdot \frac{1+\sigma_\parallel^2}{1+\sigma_\perp^2}$$

Für den Brechungsindex $n = 1{,}52$ der planparallelen Platte hat dieser Ausdruck bei $89^0\,30'$ Incidenz den Wert

$$\operatorname{tg}\partial = -\frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \operatorname{ctg}\,\alpha \cdot 0{,}999496 .$$

Berechnet man andrerseits die Drehung, die die Schwingungsebene der einzelnen Büschel nach der supponierten Amplitudenänderung erfahren hat, so folgt, wenn ϑ_ν den Winkel bezeichnet, den die Schwingungsebene des ν. ten Büschels mit der Einfallsebene bildet:

$$\operatorname{ctg}\vartheta_1 = \frac{\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel},$$

$$\operatorname{ctg}\vartheta_2 = \frac{s_\perp \sigma_\perp' s_\perp'}{s_\parallel \sigma_\parallel' s_\parallel'} \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel},$$

$$\operatorname{ctg}\vartheta_3 = \frac{s_\perp \sigma_\perp'^3 s_\perp'}{s_\parallel \sigma_\parallel'^3 s_\parallel'} \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel},$$

. . . . . .

Unter Zugrundelegung gleicher Bedingungen (Einfallswinkel an der Platte $89^0\,30'$, Brechungsquotient 1,52) ergibt sich für das erste Büschel

$$\operatorname{ctg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot 0{,}980317 .$$

oder in erster Annäherung

$$\partial - \vartheta_1 = 90^0$$

d. h. aber: Die Verdopplung des Streifensystems ist dann am deutlichsten wahrnehmbar, wenn das erste Büschel ausgelöscht wird.

Werden die vom Würfel kommenden Teilbündel an einer Glasfläche reflektiert, und läßt man den Einfallswinkel an dieser Fläche variieren, so muß einmal laut Theorie der Fall eintreten, daß alles reflektierte Licht in der gleichen Ebene polarisiert ist, daß mithin bei Auslöschung des ersten Strahlenbündels auch die übrigen ausgelöscht werden, also absolute Dunkelheit eintritt. Bei diesem Einfallswinkel, dem „totalen Polarisationswinkel" einer idealen Fläche kann bei keiner Stellung des Analysators Verdopplung eintreten, weil die Verdopplung des Streifensystems dadurch bedingt ist, daß die Schwingungsrichtungen der einzelnen Strahlenbündel gegeneinander geneigt sind. Ich definiere als „Verdopplungsgebiet" den Winkelraum, innerhalb dessen der Analysator stets Verdopplung des Streifensystems hervorruft. Dann folgt, daß bei Reflexion unter dem totalen Polarisationswinkel die Größe des Verdopplungsgebietes Null ist; bei größeren und kleineren Einfallswinkeln muß mit der größeren Streuung

der Schwingungsrichtungen der einzelnen Büschel das Gebiet sich verbreitern.

Die Bedingung für das Auftreten der Verdopplung ist mathematisch dadurch gegeben, daß die Gleichung

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = 0$$

für irgend ein $\beta/_2 < 90^0$ einen reellen Wert ergibt. Die allgemeine Theorie läßt hier im Stich, denn die Versuche, die Gleichung explicite zu lösen, führten zu so unübersichtlichen Ausdrücken, daß es sich als zweckmäßiger erwies, zur Berechnung der Verdopplungsgrenzen folgenden Weg einzuschlagen. Ein Minimum für $\beta/_2 = 90^0$ tritt dann auf, wenn irgend ein β_1 sich so finden läßt, daß für $0 < \beta_1/2 < 90^0$ der Wert der Intensität J_1 größer ist, als der für $\beta/_2 = 90^0$, oder in Form einer Ungleichung geschrieben

$$J_{\beta/_2 < 90^0} > J_{\beta/_2 = 90^0}.$$

Dies führt auf die Beziehung, daß die Grenzen des Verdopplungsgebietes bestimmt sind durch

8)
$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = C_1 \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = C_2 \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

wo C_1 und C_2 komplizierte Funktionen der Fresnelschen Koeffizienten $\sigma_\perp$ und $\sigma_\parallel$ sind.

§ 3.

Einfluss der Phasenänderung der Hauptkomponenten.

Sowohl die mechanischen Theorien des Lichtes wie die elektromagnetische führen bei Behandlung des Problems der Reflexion auf die Fresnelschen Ausdrücke für die Amplitudenänderungen und die bisherigen Beobachtungen wurden durch sie gut dargestellt.

Dagegen gibt bei Annahme einer idealen Grenzfläche keine Theorie die besonders in der Nähe des totalen Polarisationswinkels beobachteten Phasendifferenzen der Hauptkomponenten wieder. Um deren Auftreten zu erklären, mußte die Annahme gemacht werden, daß die reflektierende Fläche mit einer Oberflächenschicht behaftet sei; die natürlichste Annahme ist dann, daß innerhalb dieser Schicht der Brechungsquotient von dem für das Medium I geltenden Wert stetig in den für das Medium II geltenden übergeht. Der erste, der den Einfluß von Oberflächenschichten auf die Natur des reflektierten Lichtes theoretisch behandelte, war P. Zech.[1]) Trotz seiner sehr speziellen Annahme, daß der Brechungsquotient der Oberflächenschicht konstant sei, fand sich eine gute Überein-

---

1) P. Zech, Pogg. **Ann. 109**, S. 60; 1860.

stimmung mit den Jaminschen Experimenten. Beinahe gleichzeitig gab L. Lorenz[1]) unter der oben erwähnten Voraussetzung, daß die Änderung des Brechungsquotienten innerhalb der Schicht stetig sei, eine Theorie, deren Konsequenzen von Kynast[2]) gezogen und mit der Beobachtung verglichen worden sind. Die eingehendsten Versuche über diese Materie rühren wohl von P. Drude[3]) her. Auch er kam, auf Grund der elektromagnetischen Theorie des Lichtes zu Ausdrücken für die Phasendifferenzen der Hauptkomponenten, welche bei der Reflexion auftreten; übereinstimmend ergeben die Theorien von L. Lorenz-Kynast und P. Drude, daß eine Dicke der Schicht von nur $^1/_{100}$ Wellenlänge cr. erforderlich ist, um die Beobachtungen bezüglich der Elliptizität des reflektierten Lichtes zu erklären.

Wäre demnach keine Oberflächenschicht vorhanden, so müßten die Fresnelschen Formeln in aller Strenge gelten und das reflektierte Licht linearpolarisiert sein, wenn es das einfallende war. In der Tat ergaben die Drudeschen Versuche, daß bei Flächen, die von fremden Stoffen möglichst wenig verunreinigt waren, z. B. frischen Spaltflächen von Kristallen (Antimonglanz, Kalkspat) und sauber gehaltenen Flüssigkeitsflächen nur sehr geringe Elliptizität auftrat.

Ist n der Brechungsindex eines isotropen Körpers gegen Luft, φ der Einfallswinkel, so ist nach Drude die relative Phasendifferenz beider Komponenten bei Reflexion gegeben durch

$$9) \qquad \operatorname{tg} \Delta = 2\varepsilon\, n^2 \frac{\sin\varphi \,.\, \operatorname{tg}\varphi}{n^2 - \operatorname{tg}^2\varphi},$$

wo wegen des kleinen Wertes des Elliptizitätskoeffizienten ε die Phasendifferenz Δ nur im totalen Polarisationswinkel merkliche Werte annimmt, so daß also die bei dem Würfel auftretenden Phasendifferenzen zu vernachlässigen sind.

Es fragt sich nun, in welcher Weise der Einfluß endlicher Phasendifferenzen auf die Lummerschen Doppelringe sich kennzeichnet. Fügt man zu den Amplitudenänderungen noch die der Phasen, so wird der Schwingungszustand der Einzelwellen vor Eintritt in den Analysator gekennzeichnet sein durch

I.	$a\,\sigma_\perp \varrho_\perp \cos\alpha \,.\, \sin x$	$a\sigma_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime} \sin\alpha \,.\, \sin(x+\Delta)$,
II.	$a s_\perp \sigma_\perp' s_\perp' \varrho_\perp \cos\alpha \,.\, \sin(x+\beta)$	$a s_{\prime\prime}\sigma_{\prime\prime}' s_{\prime\prime}' \varrho_{\prime\prime} \sin\alpha \,.\, \sin(x+\beta+\Delta)$,
III.	$a s_\perp \sigma_\perp'^3 s_\perp' \varrho_\perp \cos\alpha \,.\, \sin(x+2\beta)$	$a s_{\prime\prime}\sigma_{\prime\prime}'^3 s_{\prime\prime}' \varrho_{\prime\prime} \sin\alpha \,.\, \sin(x+2\beta+\Delta)$,
	. . . . .	. . . . .

wo Δ die relative Phasendifferenz der Hauptkomponenten bezeichnet; also gibt nach Verlassen des Analysators:

---

[1]) L. Lorenz, Pogg. Ann. **111**, S. 460ff. 1860.
[2]) R. Kynast, Inaug.-Diss. Breslau 1906.
[3]) P. Drude. Wied. Ann. **36**, S, 865, 1889 und **43**, S. 126, 1891.

I. $a\sigma_\perp\varrho_\perp \cos\alpha \cos\vartheta \cdot \sin x \qquad a\sigma_{\shortparallel}\varrho_{\shortparallel} \sin\alpha \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(x+\Delta),$

II. $as_\perp\sigma_\perp's_\perp'\varrho_\perp \cos\alpha \cdot \cos\vartheta \cdot \sin(x+\beta)$

$as_{\shortparallel}\sigma_{\shortparallel}'s_{\shortparallel}'\varrho_{\shortparallel} \sin\alpha \cdot \sin\cdot\vartheta \sin(x+\beta+\Delta),$

III. $as_\perp\sigma_\perp'^3s_\perp'\varrho_\perp \cos\alpha \cdot \cos\vartheta \cdot \sin(x+2\beta)$

$as_{\shortparallel}\sigma_{\shortparallel}'^3s_{\shortparallel}'\varrho_{\shortparallel} \sin\alpha \cdot \sin\cdot\vartheta \sin(x+2\beta+\Delta),$

. . . .

Nun ist

9) $$S = \sum_{p=0}^{\infty} y^p \cos(\mu + p\nu) = \frac{\cos\mu - y\cos(\mu-\nu)}{1 - 2y\cdot\cos\nu + y^2}.$$

Unter Anwendungen der Beziehungen 2) und 3) folgt

10) $$\underline{\underline{J_{1-\infty} = M_\perp^2(A_\perp^2 + B_\perp^2) + M_{\shortparallel}^2(A_{\shortparallel}^2 + B_{\shortparallel}^2) + 2M_{\shortparallel}M_\perp \cos\Delta(A_{\shortparallel}A_\perp}}$$

$$\underline{\underline{+ B_{\shortparallel}B_\perp) + 2M_{\shortparallel}M_\perp \sin\Delta(A_\perp B_{\shortparallel} - B_\perp A_{\shortparallel})}}$$

wo $A_{\shortparallel}, A_\perp, B_{\shortparallel}, B_\perp, M_{\shortparallel}$ und $M_\perp$ die in 4) und 5) definierten Ausdrücke sind. Für den Fall $\Delta = 0$ erhält man den oben bereits entwickelten Wert.

Auch hier gibt die zahlenmäßige Berechnung einen Überblick über die Veränderungen, die durch Phasendifferenzen der Hauptkomponenten erzeugt werden. Die folgenden Tabellen sind für die Grenzfälle elliptisch polarisierten Lichtes $\left(\Delta = \frac{\pi}{2};\ \Delta = 0\right)$ berechnet und zwar unter der Annahme, daß die von der planparallelen Platte kommenden Hauptkomponenten ohne Änderung ihrer Amplituden $(\varrho_\perp = \varrho_{\shortparallel} = 1)$ einen Gangunterschied 0 resp. $\frac{\lambda}{4}$ erleiden, etwa durch ein in den Weg der Strahlen eingefügtes $\frac{\lambda}{4}$ = Blättchen. Die übrigen Größen wurden entsprechend den andern Tabellen gewählt (Brechungsquotient der Platte $n = 1{,}52$, Einfallswinkel $i = 89^0\,30'$, Polarisatorstellung $\alpha = 45.$).

Man erkennt aus den Tabellen, daß bei dem Grenzfalle elliptischen Lichtes $\Delta = \frac{\pi}{2}$ die Helligkeit für $\beta/_2 = 90^0$ stets die gleiche ist, welche Stellung der Analysator auch haben mag; für den Fall, daß die Phasendifferenz $\Delta = 0$ ist, schwankt die Intensität für $\beta/_2 = 90^0$ bei Drehen des Analysators zwischen 0 und 1. Für den Zwischenfall elliptisch polarisierten Lichtes ist die größte Intensitätsschwankung $J_1 - J_2$ für $\beta/_2 = 90^0$ zwischen 0 und 1 gelegen, so daß folgender Zusammenhang zwischen Elliptizität Δ und der maximalen Intensitätsschwankung besteht:

Insensitätsschwankung	Phasendifferenz
$J_1 - J_2 = 1$	$\Delta = 0;$
$0 < J_1 - J_2 < 1$	$0 < \Delta < \frac{\pi}{2};$
$J_1 - J_2 = 0$	$\Delta = \frac{\pi}{2}.$

Hierdurch ist ein Kriterium für die Untersuchung der Elliptizität gegeben. (Die Helligkeitsschwankung des linearpolarisierten Lichtes ist als willkürliche Einheit benutzt.)

$$\Delta = \frac{\pi}{2}$$

sin β/2	J für δ = 0	J für δ = 45°	J für δ = 90°	J für δ = 135°
0	0	0	0	0
0,01	0,037	0,116	0,150	0,071
0,02	0,122	0,296	0,316	0,142
0,03	0,210	0,415	0,397	0,192
0,05	0,334	0,518	0,457	0,274
0,1	0,442	0,548	0,489	0,384
0,2	0,485	0,538	0,497	0,444
0,3	0,493	0,528	0,499	0,465
0,4	0,497	0,521	0,499	0,475
0,5	0,498	0,516	0,500	0,482
0,6	0,498	0,512	0,500	0,486
0,7	0,499	0,509	0,500	0,489
0,8	0,499	0,506	0,500	0,492
0,9	0,499	0,504	0,500	0,494
1	0,500	0,500	0,500	0,500

$$\Delta = 0$$

sin β/2	J für δ = 0	J für δ = 45°	J für δ = 90°	J für δ = 135°
0	0	0	0	0
0,01	0,037	0,165	0,150	0,022
0,02	0,122	0,400	0,316	0,038
0,03	0,210	0,471	0,397	0,037
0,05	0,334	0,767	0,457	0,024
0,1	0,442	0,923	0,489	0,008
0,2	0,485	0,980	0,497	0,002
0,3	0,493	0,991	0,499	0,001
0,4	0,497	0,996	0,499	0,0005
0,5	0,498	0,997	0,500	0,0003
0,6	0,498	0,998	0,500	0,0002
0,7	0,499	0,998	0,500	0,0001
0,8	0,499	0,999	0,500	0,00004
0,9	0,499	0,999	0,500	0,00002
1	0,500	0,999	0,500	0,00000006

Anm. Auch in diesen Tabellen sind die Werte, bei denen die Intensität ein Maximum durchschreitet, durch Unterstreichen hervorgehoben.

Allgemein folgt:

$$\cos \Delta = F(J_1 - J_2)$$

wo die Koeffizienten der Funktion von den Werten für $\sigma_{''}$, $\sigma_{\perp}$ und α abhängen.

Außer einer Aufhellung des Grundes, d. h. des zweiten Minimums (bei elliptisch polarisiertem Licht wird das zweite Minimum niemals absolut dunkel) bewirkt aber die Phasendifferenz der Komponenten noch eine Drehung der Analysatorstellung, bei der die „maximale Sichtbarkeit der Verdopplung" stattfindet. Die Stellung des Analysators, für welche das Minimum bei $\beta/_2 = 90^0$ am dunkelsten wird, ist bestimmt durch

$$\frac{dJ}{d\vartheta} = 0.$$

Dieses führt auf die Beziehung

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{1}{2 \cos \Delta \,.\, C}\left(C^2 - 1 \pm \sqrt{(C-1)^2 + 4C^2 \cos^2 \Delta}\right)$$

$$\text{wo } C = \frac{A_{\perp}}{A_{''}} \,.\, \frac{\varrho_{\perp}}{\varrho_{''}} \,.\, \operatorname{ctg} \alpha \text{ ist.}$$

Ist die Phasendifferenz nicht allzu groß, so wird in erster Annäherung gelten

$$11) \qquad \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{C}{\cos \Delta} + \frac{C \,.\, \sin^2 \Delta}{\cos \Delta (C^2 + 1)}.$$

(Der zweite Wert, der sich aus obiger Gleichung ergibt, entspricht der maximalen Helligkeit.)

Man erhält diesen Ausdruck, wenn man den Radikanden nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt und die höheren Potenzen von $\sin \Delta$ vernachlässigt. Für sehr kleine Phasendifferenzen wird auch hier die Proportionalität von $\operatorname{tg} \vartheta$ und $\frac{\varrho_{\perp}}{\varrho_{''}}$ gewahrt, denn es ist unter dieser Voraussetzung

$$12) \qquad \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\varrho_{\perp}}{\varrho_{''}} \cdot \frac{A_{\perp}}{A_{''}} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \Delta} = -\frac{\varrho_{\perp}}{\varrho_{''}} \cdot \frac{\Gamma}{\cos \Delta};$$

Ausdrücke gleicher Form gelten bei kleinen Phasendifferenzen auch für die Grenzen des Verdopplungsgebietes. Für große Phasendifferenzen erhält man eine Beziehung

$$\operatorname{tg} \vartheta = F\left(\frac{\varrho_{\perp}}{\varrho_{''}}, \cos \Delta\right)$$

wo F eine komplizierte Funktion bedeutet, deren Koeffizienten abhängig sind von den Fresnelschen Werten $\sigma_{''}$ und $\sigma_{\perp}$ und der Polarisatorstellung α.

Es liegt somit die Möglichkeit vor, aus der Intensitätsschwankung des Grundes und der Einstellung des analysierenden Nicolschen Prismas auf maximale Verdopplung

Schlüsse zu ziehen auf Phasendifferenzen der Hauptkomponenten und Drehung der Polarisationsebene. Welcher praktischen Anwendung dieses Prinzip fähig ist, müssen die Versuche lehren.

II. Beobachtungen.

§ 4.

Anordnung der Versuche.

Um genügend homogenes, helles Licht zu erhalten, wurde eine Lummersche Quecksilberlampe mit Wasserspülung benutzt. Das vom Spalte S_1 (vgl. Fig. 3) kommende Licht wurde durch die Linse L_1 parallel gemacht und durch ein aus 5 Prismen bestehendes Gradsichtprisma geleitet. Die Linse L_2 erzeugte in der Ebene des Spaltes S_2 eines Kollimatorrohres ein Spektrum des Quecksilberbogens, im wesentlichen bestehend aus 4 diskreten Spaltbildern. Am geeignetsten für die Beobachtung erwies sich das Licht der hellgrünen Quecksilberlinie $\lambda = 546\ \mu\mu$, da es erstens genügend homogen war und zweitens intensiv genug, um trotz der vielfachen Reflexionen und Brechungen ein helles Bild in der Fadenkreuzebene des Beobachtungsfernrohres zu liefern. Außerdem ist das menschliche Auge für diese Farbe sehr empfindlich. Die gelben Linien, die auch eine genügende Intensität besitzen, sind bei breitem Spalte schwer zu trennen und infolgedessen überlagern sich die den beiden Wellenlängen entsprechenden Einzelphänomene und stören die Beobachtung.

Es wurde also das Kollimatorrohr, welches auf Unendlich eingestellt war, derart justiert, daß das Licht der hellgrünen Quecksilberlinie den Spalt S_2 durchsetzte. Aus der Linse des Kollimatorrohres trat ein Bündel parallelen Lichtes aus und wurde durch das Nicolsche Prisma N_1 linear polarisiert. Die Schwingungsebene des letzteren stand während aller Versuchsreihen fest und bildete einen Winkel von ca. 45^0 mit der Einfallsebene des Doppelwürfels W (vgl. S. 6).

Das Lichtbündel fiel nahezu senkrecht auf die Kathetenfläche des Doppelwürfels auf. Dieser (in Fig. 2 mit W bezeichnet), war zusammengesetzt aus 2 rechtwinkligen Prismen, deren Brechungsquotient für die Wellenlänge $\lambda = 546\ \mu\mu$ zu $n = 1{,}5196$ ermittelt wurde. Die Dicke der Luftschicht zwischen den Hypotenusenflächen betrug ca. $^1/_{1000}$ mm und wurde dadurch erzeugt, daß seitlich zwei feine Streifen Aluminiumfolie eingelegt wurden, wie in Fig. 3 angedeutet ist.

Die geringe Dicke der Luftschicht bewirkt, daß sehr viele Bündel zur Mitwirkung gelangen und man erhält auf diese Weise eine außerordentlich scharfe Interferenzerscheinung. Bei der Herstellung des Würfels ist besonders darauf zu achten, daß keinerlei Spannungen auftreten. Diese beeinträchtigen die Schärfe des Phänomens erheblich und bringen unter

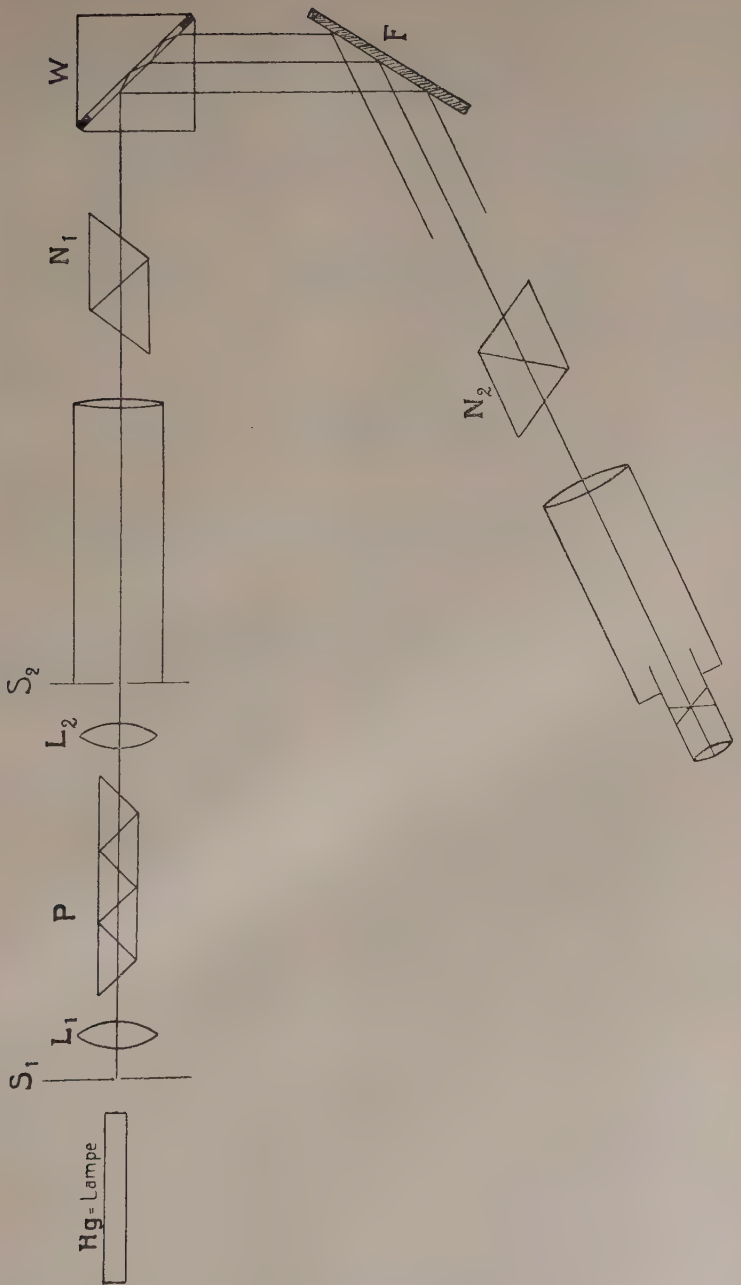


Fig. 3.

Umständen auch ohne Anwendung des Analysators eine Verdopplung und Verzerrung des Streifensystems hervor, welche die Genauigkeit der Messungen stark herabsetzt.

Die aus dem Würfel austretenden parallelen Bündel fielen auf die zu untersuchende spiegelnde Fläche *F*. Diese befand sich auf dem Tischchen eines Spektrometers und war derartig montiert, daß sie in ihrer Ebene gedreht werden konnte. Die Achse des Spektrometers mußte in der Fläche selbst liegen. Beobachtet wurde die Interferenzerscheinung mittelst eines Fernrohres, nachdem das Licht, um alle vielfach reflektierten Bündel auf gleiche Schwingungsrichtung zu bringen, durch ein analysierendes Nicolsches Prisma geschickt war. Der Teilkreis des Analysators war durch Nonius auf 2 Minuten ablesbar.

§ 5.
Versuchsmaterial.

An Material wurde benutzt:

a) Isotrope Medien.

1) Ein Prisma aus leichtest brechendem Glase von Zeiß; Hypotenusenfläche 2×3 qcm
$$n_D = 1{,}4643.$$

2) Zwei Prismen aus amorphem SiO_2; das Material hierzu war geliefert von W.C. Heräus-Hanau. Geschliffen waren beide Prismen von C. Zeiß-Jena, eins derselben erst einige Tage vor der Messung. $n = 1{,}4605$ für $\lambda = 546$ μμ.

Alle drei Prismen waren so geschliffen, daß der Grenzstrahl zwischen gewöhnlicher und totaler Reflexion die Kathetenflächen senkrecht durchsetzte.

3) Ein Prisma, rechtwinklig geschliffen, Hypotenusenfläche 3×4 qcm. $n = 1{,}5150$ für $\lambda = 546$ μμ.

4) Ein Prisma, gleichwinklig geschliffen, Flächen 4×6 qcm $n = 1{,}6472$ für $\lambda = 546$ μμ.

5) Ein schweres Silikat-Flintglasprisma (Bestandteile 79 % PbO, 21 % SiO_2) von Zeiß, Hypotenusenfläche 4×5 qcm $n = 1{,}9166$ für $\lambda = 546$ μμ.

6) Ein Prisma aus Zinkblende, Hypotenusenfläche $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$ qcm das Material war liebenswürdigerweise von Herrn Professor Hintze-Breslau zur Verfügung gestellt worden. $n = 2{,}3902$ für $\lambda = 546$ μμ.

Für die beiden letzten Prismen gilt bezüglich der Kantenwinkel dieselbe Eigenschaft wie für die Prismen 1 und 2. Außerdem wurde für vergleichende Messungen ein Flußspatprisma benutzt.

b) Kristallinische Medien.

1) Quarzflächen; senkrecht zur Axe geschliffen.
2) Quarzflächen; parallel zur Achse geschliffen.
3) Kalkspat; senkrecht zur Achse geschliffen.
4) Kalkspat; parallel zur Achse geschliffen.

Die benutzten Quarz- und Kalkspatflächen waren zum Teil Eigentum des Instituts, zum andern Teil sind sie in liebenswürdiger Weise von der Firma Fr. Schmidt und Haensch in Berlin zur Verfügung gestellt worden.

§ 6.
Erscheinung.

Es wurde zunächst die Erscheinung betrachtet, die sich ohne Zwischenschaltung der zu untersuchenden Platte ergab; nachdem der Apparat in der üblichen Weise justiert war, zeigte sich, daß bei nahezu parallelen Nicols das Spaltbild von scharfen dunklen Streifen durchzogen war, wenn man die fast total reflektierten Strahlen in das Okularrohr gelangen ließ. Besonders der erste Streifen von der Grenze der Totalreflexion an zeigte die „Airysche Schärfe". Bei Drehung des Analysators erfolgte, wie sich nach der dargelegten Theorie erwarten ließ, in dem Zwischenraum zwischen den dunklen Streifen eine Abnahme der Intensität, es bildete sich zwischen den ursprünglichen Minimums ein neues, d. h. es trat das Lummersche Doppelsystem auf; bei weiterem Drehen wurde die Intensität des neuen Minimums Null und gleichzeitig trat eine Verdunklung des ganzen Gesichtsfeldes ein. Das Aussehen war folgendes: Auf dunklem Grunde zeigten sich zwei durch das ursprüngliche scharfe Minimum getrennte schmale helle Streifen. Bei weiterem Drehen wurde der Grund wieder heller, bis bei 180° Drehung wieder das ursprüngliche Phänomen sich zeigte (vgl. auch Fig. 1). Hierbei ergab sich nun, daß der Übergang des Doppelstreifensystems in das einfache einmal sprungweise geschieht. Dieser „Sprung" ließ eine sehr genaue Einstellung zu, genauer als die auf größte Dunkelheit des zweiten Minimums. Der maximale Fehler beträgt unter Benutzung dieses Kriteriums bei 12 Einstellungen ca. $\pm$ 5 Bogenminuten. Es wurden dann die mit Benzin, Äther und Alkohol gereinigten Flächen in den Strahlengang gebracht und die Stelle des Verdopplungssprunges von 5 zu 5 Grad Einfallswinkel gemessen. Die Nullstellung des Fernrohres war gegeben durch Koinzidenz des Fadenkreuzschnittpunktes mit dem ersten dunklen Streifen von der Grenze der Totalreflexion ab. Leider konnte nur bis 20° Incidenz gemessen werden, da für kleinere Einfallswinkel der Analysatorteilkreis den Strahlengang zwischen Würfel und zu untersuchender Fläche abblendete.

In der Nähe des totalen Polarisationswinkels war die Einstellung wegen der allzugroßen Dunkelheit etwas ungenauer. Es konnten deshalb bei der gegebenen Polarisatorstellung für dieses Intervall nicht für alle Flächen exakte Werte bestimmt werden. Die nur bis auf $\pm$ 15′ genauen

Werte sind durch beigesetzte Fragezeichen gekennzeichnet. Größere Helligkeit läßt sich hier erreichen, wenn man die Schwingungsebene des Polarisators bis auf ca. 5—10° zur Einfallsebene neigt; hierdurch wird die Hauptkomponente, die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, gegenüber der andern verstärkt. Die so erhaltenen Werte sind aber nicht direkt mit den bei 45° Stellung des Polarisators beobachteten zu vergleichen. Auch für 85° Incidenz sind nicht in jedem Falle genaue Messungen möglich; es macht sich jede Unebenheit der Fläche dadurch störend bemerkbar, daß sich diffuses Licht über das Phänomen lagert.

§ 7. Zahlenwerte der Beobachtungen.

Die für den Verdopplungssprung erhaltenen Werte der Analysatorstellung sind bei isotropen Körpern folgende:

Einfallswinkel	$Si\,O_2$ amorph $n=1{,}460$	Glas $n=1{,}464$	Glas $n=1{,}515$	Glas $n=1{,}647$	Glas $n=1{,}917$	Zinkblende $n=2{,}390$
85°	94° 35′	94° 35′	94° 32′	94° 27′	93° 58′	90° 42′
80°	90° —′	90° 10′	89° 45′	89° 13′	86° 53′	83° 15′
75°	85° 22′	85° 55′	85° 10′	83° 56′	80° 35′	76° 27′
70°	80° 29′	81° 19′	80° 11′	78° 12′	74° 23′	70° 9′
65°	75° 44′	76° 48′	75° 16′	73° 32′	70° 27′	66° 50′
60°	70° 45′	72° —′	70° 11′	69° 18′	67° 1′	65° 39′
55°	?	68° 44′?	?	65° 32′	64° 22′	61° 39′
50°	64° 9′	63° 54′	63° 51′	62° 48′	59° 36′	57° 14′
45°	59° 38′	59° 20′	59° 27′	57° 32′	55° 37′	53° 29′
40°	55° 10′	54° 50′	54° 36′	53° 10′	51° 44′	49° 31′
35°	51° 19′	50° 31′	50° 51′	49° 34′	47° 52′	46° 9′
30°	47° 28′	47° 28′	47° 30′	45° 49′	44° 49′	43° 24′
25°	44° 40′	44° 40′	44° 4′	42° 30′	42° 6′	41° 52′
20°	42° 4′	42° 11′	41° 36′	40° 35′	40° 9′	39° 37′

Jede Zahl dieser Tabelle ist das Mittel aus 12 Einstellungen. In Tafel II sind diese Werte graphisch dargestellt. Wie aus dieser ersichtlich ist, ist der Charakter dieser Kurven im Prinzip der gleiche. Nur das Glas $n = 1{,}464$ zeigt Abweichungen vom allgemeinen Verhalten, auf deren Grund ich noch später zurückkommen werde.

Oberhalb und unterhalb des totalen Polarisationswinkels ist die Lage des Analysators, bei welcher der Verdopplungssprung sich zeigt, fast proportional dem Einfallswinkel; der Knick, der sich bei allen Kurven zeigt und zwar unterhalb des Polarisationswinkels, weicht von diesem mit wachsendem Brechungsquotienten immer mehr ab. Um die Stelle dieses Knicks genauer zu bestimmen, wurden bei dem Prisma vom Brechungs-

quotienten 1,647 zwischen 50^0 und 57^0 Einfallswinkel die Werte des Verdopplungssprunges von Grad zu Grad bestimmt. Es ergab sich:

Einfallswinkel	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0	55^0	56^0	57^0
Verdoppl.-Sprung	$62^0\,48'$	$63^0\,12'$	$63^0\,47'$	$64^0\,32'$	$65^0\,12'$	$65^0\,32'$	$66^0\,28'$	$67^0\,41'$

§ 8.

Vergleich mit der Theorie.

Um die beobachteten Werte mit der Theorie zu vergleichen, wurde zunächst der Ausdruck 8) § 2 benutzt, der die Lage des Verdopplungssprunges in Abhängigkeit von der Amplitudenänderung darstellt. Er lautet in einfachster Form

$$\operatorname{tg} \partial = - \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot C.$$

Berücksichtigt man, daß bei den Versuchen der Teilkreis des Analysators nicht auf Null steht, wenn seine Schwingungsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt und daß die Zählung beim Apparat im Sinne des Uhrzeigers erfolgte, während für die Theorie die entgegengesetzte Richtung vorausgesetzt war, so folgt, daß die Beobachtungen dargestellt sein müssen durch den Ausdruck

$$\operatorname{tg} (180 - \partial + \varphi) = - \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot C,$$

wo ∂ die Ablesung darstellt und φ den Nullpunkt des Analysatorteilkreises kennzeichnet. φ ist für alle Messungsreihen das gleiche, während C innerhalb eines kleinen Intervalles schwankt. Es ergaben sich für φ und C die Werte

$$\varphi = 68^0\,30', \; C = + 0{,}603 \pm A;$$

wo A die Differenz von C bei den einzelnen Messungsreihen angibt. Die Schwankungen von C werden dadurch bedingt, daß der Einfallswinkel an der planparallelen Platte nicht genau reproduziert werden konnte, da das Tischchen, auf dem der Würfel stand, nicht mikrometrisch gedreht werden konnte.

Berechnet man unter Zugrundelegung dieser Konstanten aus den Beobachtungen die Werte von $\varrho_\perp/\varrho_\parallel$ und vergleicht diese mit den theoretisch sich ergebenden Werten (unter Voraussetzung der Gültigkeit der Fresnelschen Formeln) so folgt, wie aus den Tabellen ersichtlich ist, daß die Abweichungen von den theoretischen Werten prozentisch besonders groß sind in der Nähe des totalen Polarisationswinkels; und außerdem, daß die Abweichungen mit wachsendem Brechungsindex zunehmen (vgl. die Tafeln III und IV).

	$n = 1{,}515$		$n = 1{,}647$		$n = 1{,}917$		$n = 2{,}39$	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
90°	1	1	1	1	1	1	1	1
85°	0,810	0,818	0,782	0,792	(0,770)?	0,749	0,677	0,677
80°	0,645	0,657	0,610	0,618	0,538	0,545	0,436	0,436
75°	0,495	0,510	0,455	0,459	0,346	0,370	0,226	0,248
70°	0,343	0,367	0,276	0,312	0,168	0,214	0,049	0,078
65°	0,194	0,229	0,142	0,171	0,055	0,069	—0,043	—0,067
60°	0,049	0,091	0,019	0,034	—0,042	—0,067	—0,084	—0,197
55°	—0,043	—0,045	—0,085	—0,100	—0,118	—0,194	—0,194	—0,317
50°	—0,135	—0,179	—0,162	—0,231	—0,254	—0,316	—0,329	—0,428
45°	—0,263	—0,310	—0,313	—0,357	—0,370	—0,433	—0,443	—0,528
40°	—0,409	—0,438	—0,442	—0,476	—0,487	—0,538	—0,570	—0,621
35°	—0,528	—0,557	—0,552	—0,587	—0,611	—0,641	—0,679	—0,705
30°	—0,637	—0,666	—0,675	—0,691	—0,710	—0,732	—0,769	—0,781
25°	—0,751	—0,763	—0,789	—0,780	—0,802	—0,810	—0,830	—0,847
20°	—0,878	—0,846	—0,856	—0,856	—0,875	—0,875	—0,908	—0,902

Berechnet man dagegen für das Glasprisma $n = 1{,}464$ die Beträge von $\varrho_\perp | \varrho_\parallel$, so zeigt sich, daß hier die Abweichungen sehr gering sind. Dieser Körper schließt sich also am besten an den theoretisch berechneten Verlauf an. Es ist daraus zu schließen, daß dieses Prisma nur geringe Elliptizität zeigt. Dafür spricht auch, daß dieses Prisma erst ca. 8 Tage vor der Messung geschliffen wurde, also kaum mit stärkeren sich im Verlauf der Zeit bildenden Oberflächenschichten behaftet sein konnte; die Werte für dieses Prisma sind:

Glas $n = 1{,}464$

Einfallswinkel	beobachtet	berechnet	Einfallswinkel	beobachtet	berechnet
85°	0,829	0,829	50°	—0,136	—0,156
80°	0,673	0,675	45°	—0,273	—0,289
75°	0,533	0,534	40°	—0,412	—0,415
70°	0,385	0,395	35°	—0,550	—0,542
65°	0,246	0,256	30°	—0,652	—0,655
60°	0,104	0,119	25°	—0,749	—0,756
55°	—	—0,018	20°	(—0,802)?	—0,843

Dafür, daß die geringe Elliptizität dieses Prismas bedingt war durch das Fehlen jeglicher Oberflächenschicht, spricht auch der Umstand, daß sich eine Fläche von noch geringerem Brechungsquotienten, eine Fläche aus amorphem $Si\,O_2$, die sich seit ca. einem Jahre im Institut befand, dem Charakter der schwerer brechenden Flächen gut anschloß. Dagegen zeigte ein Prisma aus amorphem $Si\,O_2$, welches erst wenige Tage vor

der Untersuchung geschliffen war, Abweichungen im gleichen Sinne wie Prisma $n = 1{,}464$. Bei der Auswertung der Beobachtungsresultate zeigte sich sogar, daß diese frische $Si\,O_2$ Fläche eine geringe negative Elliptizität zeigte, wie durch Vergleich mit den an einer Flußspatfläche gewonnenen Resultaten sich schließen läßt. Die negative Elliptizität kennzeichnet sich dadurch, daß die beobachteten Werte von $\varrho_\perp/\varrho_\parallel$ für Einfallswinkel, welche kleiner sind, als der Winkel der totalen Polarisation, ihrem absoluten Werte nach größer sind, als die berechneten.

Einfallswinkel	$Si\,O_2$ amorph.			Einfallswinkel	Flußspat	
	berechnet	beobachtet			berechnet	beobachtet
		frisch geschliffen	alt			
85°	0,829	0,829	+ 0,829	85°	0,833	0,833
80°	0,675	0,667	+ 0,663	80°	0,682	0,663
75°	0,534	0,523	+ 0,517	75°	0,543	0,500
70°	0,395	0,388	+ 0,361	70°	0,404	0.352
65°	0,256	0,259	+ 0,212	65°	0,266	0,172
60°	0,119	0,129	+ 0,067	60°	0,128	0,012
55°	— 0,018	—	—	55°	— 0,009	— 0,111
50°	— 0,154	— 0,190	— 0,128	50°	— 0,146	— 0,261
45°	— 0,289	— 0,295	— 0,263	45°	— 0,281	— 0,393
40°	— 0,415	— 0,419	— 0,400	40°	— 0,409	— 0,537
35°	— 0,542	— 0,551	— 0,520	35°	— 0,536	— 0,690
30°	— 0,655	— 0,662	— 0,648	30°	— 0,651	—
25°	— 0,756	— 0,759	— 0,743	25°	— 0,753	—
20°	— 0,843	— 0,847	— 0,843	20°	— 0,841	— 0,835

Den Grund für das gleichzeitige Vorkommen positiver und negativer Elliptizität bei einem und demselben Körper wenn auch bei verschiedenen Individuen vermag ich zur Zeit noch nicht anzugeben. Auch Schmidt[1]) hatte Ähnliches beobachtet, ohne dafür eine Erklärung geben zu können.

Benutzt man zur Darstellung der Beobachtungsresultate die Formel:

$$\operatorname{tg} \partial = F\left(\frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel}, \cos \Delta\right)$$

in der einfachsten Form

$$\operatorname{tg}\,(180 - \partial + \varphi) = -\frac{\varrho_\perp}{\varrho_\parallel} \cdot \frac{C}{\cos \Delta},$$

berücksichtigt also bei der Berechnung von $\varrho_\perp/\varrho_\parallel$ die notwendig auftretende Elliptizität, so erhält man eine größere Annäherung an die theoretisch

1) K. E. F. Schmidt. Wied. Ann. **51.** S. 417. 1894; 52. S. 75. 1894; **53.** S. 769. 1894.

ermittelten Werte. In der folgenden Tabelle sind die Werte von Δ benutzt, die sich aus der Drudeschen Formel

$$\operatorname{tg} \Delta = 2\varepsilon n^2 \frac{\sin \varphi \,.\, \operatorname{tg} \varphi}{n^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

ergeben. Nach den Resultaten von Kynast[2]) waren die Elliptizitätskoeffizienten der Prismen von den Brechungsquotienten $n = 1{,}515$ und $n = 1{,}917$ gegeben zu $\varepsilon = 0{,}007$ bezw. $= 0{,}055$.

Dann folgt:

	$n = 1{,}515$		$n = 1{,}917$	
	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
85°	0,818	0,810	0,749	(0,770) ?
80°	0,657	0,645	0,545	0,540
75°	0,510	0,495	0,370	0,350
70°	0,367	0,345	0,214	0,174
65°	0,229	0,194	0,069	0,063
60°	0,091	0,049	— 0,067	— 0,056
55°	— 0,045	— 0,043	— 0,194	— 0,123
50°	— 0,179	— 0,135	— 0,316	— 0,258
45°	— 0,310	— 0,263	— 0,433	— 0,372
40°	— 0,438	— 0,409	— 0,538	— 0,487
35°	— 0,557	— 0,528	— 0,641	— 0,611
30°	— 0,666	— 0,637	— 0,732	— 0,710
25°	— 0,763	— 0,751	— 0,810	— 0,802
20°	— 0,846	— 0,878 ?	— 0,875	— 0,875

Die obige Formel genügt nur insofern den Beobachtungen, als sie die Abweichungen der Beobachtungen von den Berechnungen in richtigem Sinne korrigiert. Ob die Elliptizität allein die Abweichungen verursacht, läßt sich hiernach nicht entscheiden. Ebenso läßt sich nichts darüber aussagen, ob die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten in aller Strenge gelten.

§ 9.

Verhalten anisotroper Medien.

Während für jeden isotropen Körper bei senkrechter Incidenz das Verhältnis der Fresnelschen Koeffizienten $\varrho_\perp/\varrho_\parallel$ den absoluten Wert 1 hat, ein senkrecht reflektiertes Lichtbündel mithin keinerlei Änderung seiner Polarisationsebene erleidet, gilt dies bei doppeltbrechenden Medien nicht mehr. Die Abweichung von dem Werte 1 hängt ab von der Stärke der Doppelbrechung und außerdem von der Lage der Axe resp. der Binormalen gegen die spiegelnde Fläche und die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Diese letztere Eigenschaft bedingt, daß der Wert des Verhältnisses $\varrho_\perp/\varrho_\parallel$

[2]) Kynast. a. a. O. S. 27.

sich ändert, wenn unter sonst gleichem Strahlengange die doppeltbrechende Fläche in ihrer Ebene gedreht wird.

Für die Lage des Verdopplungssprunges in Abhängigkeit von der Analysatorstellung hat dies folgendes zu bedeuten: Während bei allen isotropen Medien dieser Sprung für senkrechte Incidenz bei gleicher Analysatorstellung stattfindet, die Eigenschaften des Materials also nicht zur Geltung kommen, gilt dies bei doppeltbrechenden Substanzen im allgemeinen nicht mehr. Die Kurven, die die Abhängigkeit des Sprunges vom Einfallswinkel darstellen, laufen für isotrope Körper für alle Brechungsquotienten in einem Punkte zusammen sowohl bei 0^0 als bei 90^0 Incidenz, für Kristalle dagegen nur noch bei streifender Incidenz. Die Lage des Verdopplungssprunges ist nur dann unabhängig von der Doppelbrechung, d. h. von den speziellen Werten der Hauptbrechungsindices, wenn der Körper einaxig und die Axe senkrecht zur reflektierenden Fläche ist.

Diese Folgerungen zeigten sich in der Tat zutreffend. Es wurde untersucht Quarz und Kalkspat. Während bei Flächen, welche senkrecht zur Axe geschliffen waren, sich keine Änderung zeigte, wenn die Flächen in ihrer Ebene gedreht wurden, fand bei solchen, die parallel zur Axe geschliffen waren, ein zumal beim Kalkspat beträchtliches Wandern des Verdopplungssprunges statt. Die in gleicher Weise wie bei isotropen Körpern ausgeführten Messungen ergaben folgende Resultate:

Quarz.

Einfallswinkel	senkrecht zur Achse	∥ zur Achse Achse vertikal	∥ zur Achse Achse horizontal	∥ zur Achse Achse 45° zur Horizontalen geneigt
85°	94° 19′	94° 16′	94° 15′	94° 18′
80°	89° 29′	89° 26′	89° 41′	89° 36′
75°	84° 45′	84° 7′	84° 46′	84° 38′
70°	79° 43′	79° 9′	80° 13′	79° 58′
65°	74° 46′	74° 14′	75° 21′	75° —′
60°	69° 38′	69° 13′	70° 31′	70° 2′
55°	65° 39′	?	?	?
50°	62° 15′	61° 1′	63° 1′	62° 2′
45°	57° 25′	57° 13′	59° 1′	57° 38′
40°	53° 2′	52° 23′	54° 27′	53° 28′
35°	48° 59′	48° 38′	51° —′	49° 23′
30°	45° 25′	44° 42′	48° —′	46° 9′
25°	42° 38′	42° 19′	45° 30′	43° 11′
20°	40° 44′	40° 16′	43° 2′	40° 46′

Die letzte Reihe der Tabelle enthält die Werte des Verdopplungssprunges für den Fall, daß die parallel zur reflektierenden Fläche liegende Achse gegen die Horizontale um 45^0 geneigt ist.

Entsprechend ergab sich für

Kalkspat:

Einfallswinkel	⊥ zur Achse	∥ zur Achse Achse horizontal	∥ zur Achse Achse vertikal
85°	?	?	?
80°	88° 15′	89° 49′	89° 18′
75°	82° 54′	84° 58′	84° 34′
70°	77° 22′	80° 50′	79° 29′
65°	72° 35′	76° 35′	74° 17′
60°	?	71° 55′	69° 6′
55°	64° 41′	67° 26′	64° 48′
50°	60° 9′	65° 44′	59° 57′
45°	55° 57′	61° 21′	55° 3′
40°	52° 18′	57° 31′	49° 54′
35°	48° 59′	54° 4′	45° 19′
30°	45° 40′	51° 10′	41° 33′
25°	43° 7′	48° 17′	38° 19′
20°	41° 10′	46° 22′	35° 59′

Diese Tabellen sind dargestellt in Tafel V Fig. 1 und 2. In Fig. 1 wurde zum Vergleich die Kurve des amorphen SiO_2 eingezeichnet, die sich dem Charakter der isotropen Medien am besten anpaßt.

Die Eigenschaft, daß bei Kristallen die Lage des Verdopplungssprunges je nach der Lage der Achse variiert, ermöglicht es, die Lummerschen Doppelringe als Kriterium zu benutzen, um anisotrope Körper von isotropen zu unterscheiden. Es reicht dieses Prinzip aus, um sehr geringe Doppelbrechung wahrzunehmen. Eine Prüfung derselben durch Reflexion kann zwar auch auf andere Weise geschehen; z. B. vermittelst des Pulfrichschen Totalreflektometers. Geringe Doppelbrechung läßt sich hier nur sehr schwer bestimmen und die andern Methoden, die auf Reflexion sich gründen, erfordern sehr genaue Justierung und oft langwierige Rechnungen. Bei Reflexion der Lummerschen Doppelringe genügt eine leise Spur von Doppelbrechung, um bei Drehen der Platte in ihrer Ebene Helligkeitsschwankungen hervorzurufen, deren Stärke direkt als Maß der Doppelbrechung benutzt werden kann.

Wie fein das Kriterium ist, zeigte sich dadurch, daß bei einer Platte aus amorphen SiO_2, die im Polarisationsmikroskop nur Andeutungen von Doppelbrechung zeigte, Abweichungen in den Einstellungen des Verdopplungssprunges sich zeigten, wenn die Platte in ihrer Ebene gedreht wurde: Bei 20° Incidenz betrug die maximale Differenz ca. 1° 19′.

Für diese Untersuchungen ist die Stellung des Analysators am besten, bei welcher die Verdopplung einsetzt. Benutzt man diese Stellung und dreht dann die Platte, so erfolgt ein Übergang aus dem Doppelphänomen in das ein-

fache. Bei Platten, die senkrecht zur Achse geschliffen sind, versagt dieses Kriterium scheinbar. Es ist aber auch leicht möglich eine solche Platte von einer isotropen zu unterscheiden, die dem Mittelwert der Hauptbrechungsindices entspricht. Ist doch die Wanderung des Verdopplungssprunges in Abhänglichkeit von der Analysatorstellung bei Kristallen wesentlich anders als bei isotropen Körpern! Andrerseits ist es nun aber leicht, festzustellen, ob die Achse in der Tat senkrecht zur reflektierenden Platte ist. Es dürfen sich dann beim Drehen der Fläche in ihrer Ebene keinerlei Helligkeitsschwankungen zeigen.

§ 10.

Direkte Bestimmung der Elliptizität auf photometrischem Wege.

Es blieb noch zu untersuchen, ob der von der Theorie geforderte Einfluß der Elliptizität auf die Helligkeit des Phänomens den tatsächlichen Verhältnissen entspricht. Zu diesem Zwecke wurde der Aufbau in etwas anderer Weise vorgenommen. Es wurde, um photometrische Messungen zu ermöglichen, ein Teil des Lichtes vor Eintritt in den Spalt S_2 des Kollimatorrohres durch ein totalreflektierendes Prisma abgelenkt und durch eine Linse L_1 ein kleines helles Bild des Spaltes S_1 auf dem Spalt S_3 entworfen (vgl. Fig. 4). Die vom Spalt S_3 ausgehenden Strahlen wurden durch eine Linse L_2 parallel gemacht und vermöge des totalreflektierenden Prismas P_2 durch die Nicolschen Prismen I und II geschickt, von denen II meßbar gedreht werden konnte. Durch Linse L_3 und nochmalige Spiegelung an III wurde im unteren Teile der Brennebene des Beobachtungsfernrohres ein Spaltbild entworfen, dessen Intensität durch Drehen des Nicol II beliebig variiert werden konnte. Hinter Prisma III war der untere Teil des Beobachtungsfernrohres mit einer Blende versehen, um alles vom Würfel kommende, störende Licht abzuhalten.

Um meßbare Phasendifferenzen zwischen den Hauptkomponenten zu erzeugen, wurde zwischen Doppelwürfel und Analysator in den Strahlengang ein $\lambda/_4$ // Blättchen eingeschaltet, das sich auf einer Kreisteilung befand. Es wurde beim Drehen des $\lambda/_4$ // Blättchens folgendes beobachtet: Fiel eine Hauptschwingungsrichtung des Blättchens mit der Schwingungsrichtung des vom Würfel kommenden ersten Büschels zusammen, so daß der erste Strahl linear polarisiert war bei Eintritt in den Analysator, so fand keine merkbare Änderung des Phänomens statt. Man erhielt, wie ohne das Blättchen, das einfache Streifensystem auf hellem Grunde. Bei Drehen des Analysators trat zwischen je zwei benachbarten dunklen Streifen ein neues Minimum auf, das bei bestimmter Stellung des Analysators ein absolutes war. Wurde das $\lambda/_4$ // Blättchen gedreht, so nahm dieses Minimum an Intensität zu, das Maximum gleichzeitig ab und schließlich zeigte der Grund bei Drehung des Analysators um 360^0 keinerlei Helligkeitsschwankungen des Grundes (Grenzfall der zirkularen Polarisation des ersten Strahles).

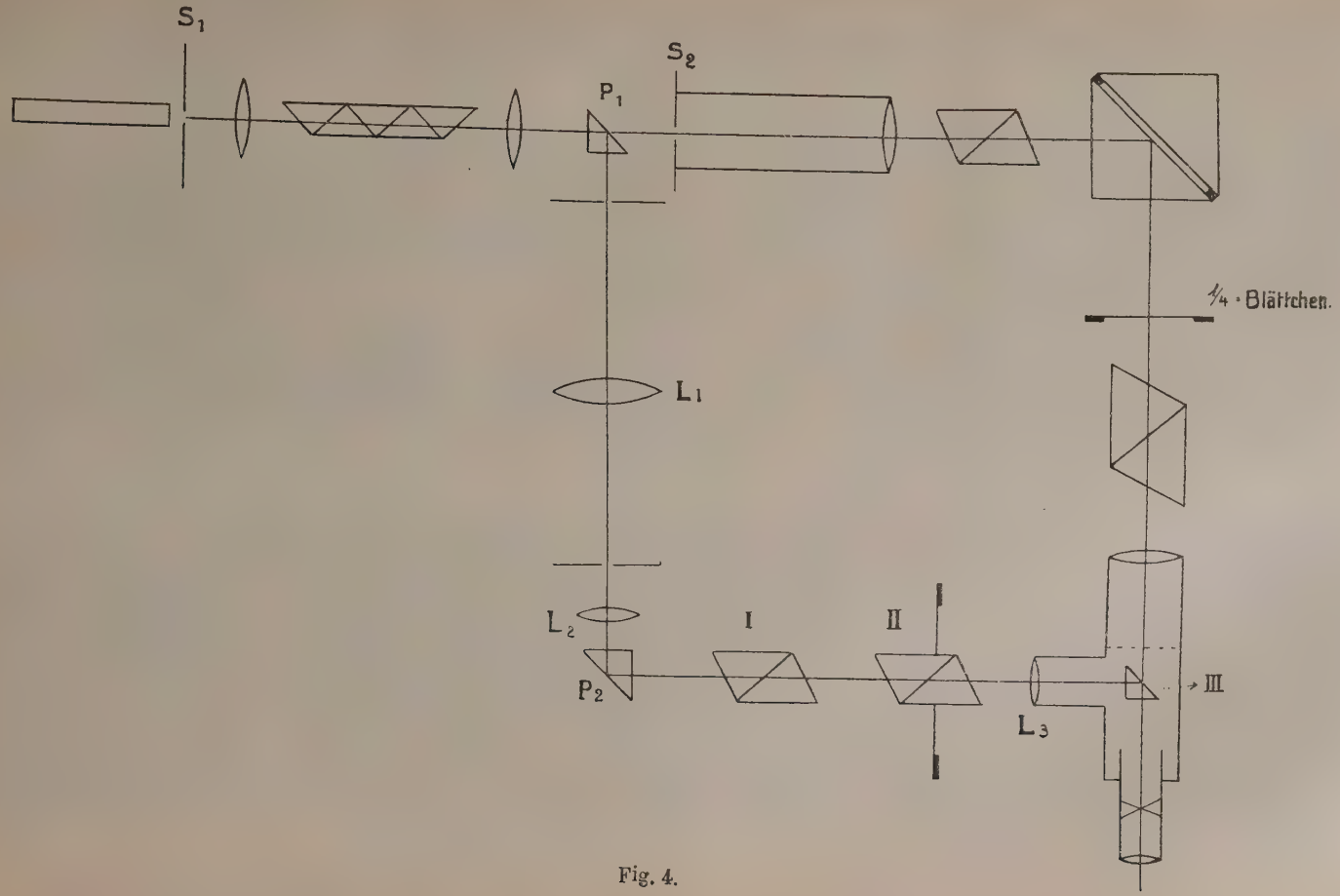


Fig. 4.

Aus der Stellung des $\lambda/4$ // Blättchens gegenüber den Hauptkomponenten des ersten Bündels läßt sich die Phasendifferenz beider leicht berechnen. Das $\lambda/4$ // Blättchen wurde von 5^0 zu 5^0 gedreht; dann wurde mittelst des Vergleichsspaltbildes die Helligkeitsschwankung gemessen, die für jede einzelne Stellung des $\lambda/4$ // Blättchens bei Drehen des Analysators sich ergab.

Bezeichnet man mit Δ die Phasendifferenzen, welche die Hauptkomponenten des ersten Strahles besitzen, mit dJ die Helligkeitsschwankungen, so folgt, wie aus folgender Tabelle und Fig. 5 ersichtlich, daß die Bedingungen auf S. 11 in der Tat annähernd erfüllt sind. Die Abweichungen

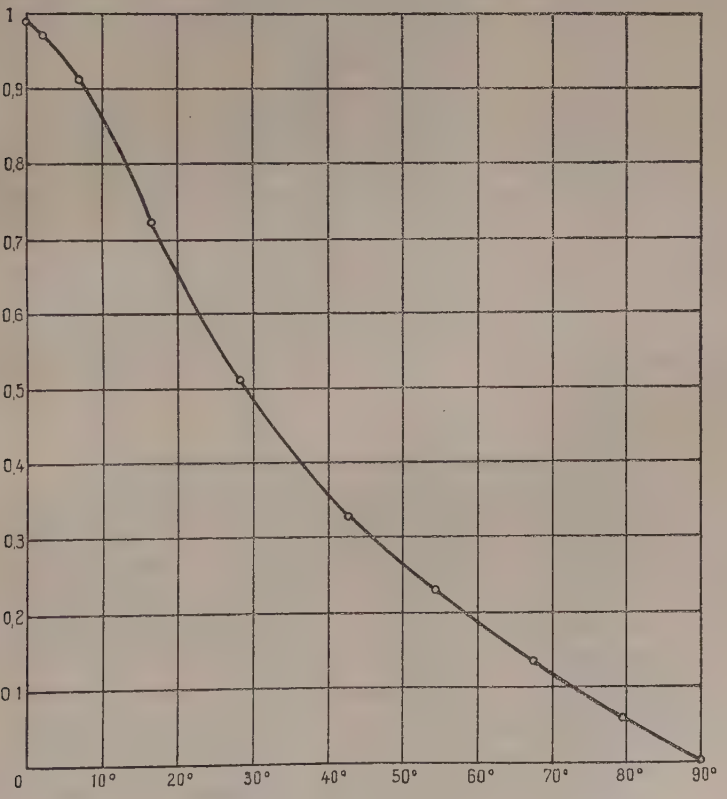


Fig. 5.

erklären sich dadurch, daß die Intensitätsschwankungen des Grundes für die Grenzfälle $\Delta = 0$ und $\Delta = \pi/2$ nur dann den Wert 1 resp. 0 besitzen, wenn man direkt an der Grenze der Totalreflektion beobachtet. Die Theorie ergibt, daß die in § 6 aufgeführten Beziehungen strenger (für die sonst benutzten Zahlenwerte, also $n = 1{,}52$; $\alpha = 45^0$) folgendermassen lauten:

Δ	dJ bei 90^0	dJ bei $89^0\ 30'$	dJ für 89^0	dJ bei 88^0
$\frac{\pi}{2}$	0	0,00050	0,00202	0,00797
$0 < \Delta < \frac{\Pi}{2}$	$0 < dJ < 1$	dJ	dJ	dJ
0	1	0,99926	0,99708	0,98831

Δ	dJ beobachtet
90^0	0
$79^0\ 30'$	0,044
$68^0\ 45'$	0,136
$56^0\ 10'$	0,236
$42^0\ 23'$	0,327
$28^0\ 30'$	0,511
$15^0\ 50'$	0,718
$7^0\ 10'$	0,913
2^0 —′	0,970
0^0	0,992

Die Abweichungen, welche die Beobachtung ergibt, liegen also, für $\Delta = 0$ und $\Delta = 90^0$ innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, da man eine Helligkeitsschwankung von 1% nicht mehr mit Sicherheit wahrzunehmen vermag.

§ 11.
Zusammenfassung der Resultate:

1) In Übereinstimmung mit den bisherigen Beobachtungen zeigte sich, daß die Elliptizität des reflektierten Lichtes beim Brewsterschen Winkel mit zunehmendem Brechungsquotienten der reflektierenden Fläche wächst; und zwar ist die Grenze zwischen positiver und negativer Elliptizität des reflektierten Lichtes bei einem Brechungsquotienten von ca. 1,46 zu suchen.

2) Der bei den Lummerschen Doppelringen im polarisierten Licht auftretende Verdopplungssprung ist im wesentlichen abhängig von der Lage der Polarisationsebene des ersten Büschels. Wird dessen Polarisationsebene, etwa durch Reflexion, gedreht, so findet eine entsprechende Änderung der Lage des Verdopplungssprunges statt. Es läßt sich also die Drehung der Polarisationsebene und damit das Verhältnis der Fresnelschen Koeffizienten für senkrecht und parallel zur Einfallsebene schwingendes Licht bestimmen.

3) Jede Elliptizität infolge von Reflexion macht sich dadurch bemerkbar, daß die maximale Helligkeitsschwankung, die bei Drehung des Analysators um 360^0 eintritt, geringer ist, als bei streng linearpolarisiertem

Licht. Wird die Helligkeitsschwankung photometrisch gemessen, so läßt sich daraus die Elliptizität des reflektierten Lichtes bestimmen. Positive und negative Elliptizität ändern die Lage des Verdopplungssprunges im entgegengesetzten Sinne.

4) Während eine Fläche eines isotropen Mediums bei Drehung in ihrer Ebene unter sonst unveränderten Bedingungen keine Änderungen des beobachteten Doppelphänomens ergibt, zeigen sich bei Drehung einer doppeltbrechenden Kristallfläche in ihrer Ebene im allgemeinen Änderungen im Aussehen des Phänomens, die dadurch bedingt sind, daß die Lage des Verdopplungssprunges von der Lage der Axe resp. der Binormalen des Kristalls gegenüber der Polarisationsebene des ersten Strahlenbündels abhängig ist. Es ist somit möglich, ein Medium durch Reflexion der Lummerschen Doppelringe auf Doppelbrechung zu untersuchen.

Anhang.

Zur Beurteilung der Erscheinungen erwies es sich als nötig, die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten für verschiedene Werte der Brechungsquotienten und für verschiedene Einfallswinkel zahlenmäßig zu kennen. Da sich ausführliche Tabellen in der Literatur nicht finden, so möchte ich hier die von mir berechneten Werte mitteilen. Da sich nach dem § 2, 1) gegebenen Formeln $\sigma_{,,}$ stets negativ ergibt, sind in den Tabellen die Worte für $-\sigma_{,,}$ und $-\sigma_{\perp}$ angegeben.

$n = 1{,}5.$

i	r	$-\sigma_{,,}$	$-\sigma_{\perp}$
0°	0°	0,2000	— 0,2000
3°	1° 59′ 58″	0,2004	— 0,1996
5°	3° 19′ 52″	0,2010	— 0,1990
10°	6° 36′ 52″	0,2041	— 0,1959
15°	9° 56′ 10″	0,2094	— 0,1906
20°	13° 10′ 49″	0,2170	— 0,1829
25°	16° 21′ 52″	0,2272	— 0,1725
30°	19° 28′ 17″	0,2404	— 0,1589
35°	22° 28′ 54″	0,2571	— 0,1416
40°	25° 22′ 27″	0,2778	— 0,1196
45°	28° 7′ 34″	0,3033	— 0,09201
50°	30° 42′ 37″	0,3347	— 0,05725
55°	33° 6′ — ″	0,3732	— 0,01334
60°	35° 15′ 53″	0,4202	+ 0,04255
65°	37° 10′ 21″	0,4776	+ 0,1139
70°	38° 47′ 24″	0,5474	+ 0,2061
75°	40° 5′ 12″	0,6319	+ 0,3268
80°	41° 2′ 12″	0,7339	+ 0,4866
85°	41° 36′ 56″	0,8558	+ 0,7032
88°	41° 46′ 47″	0,9395	+ 0,8688
89°	41° 48′ 8″	0,9693	+ 0,9321
89° 30′	41° 48′ 30″	0,9845	+ 0,9655
90°	41° 48′ 38″	1	+ 1

$n = 1{,}9.$

i	r	$-\sigma_{''}$	$-\sigma_{'}$
0°	0	0,3103	— 0,3103
3°	1° 34′ 42″	0,3108	— 0,3099
5°	2° 37′ 45″	0,3116	— 0,3091
10°	5° 14′ 38″	0,3154	— 0,3053
15°	7° 49′ 46″	0,3217	— 0,2988
20°	10° 22′ 14″	0,3309	— 0,2895
25°	12° 51′ 7″	0,3429	— 0,2770
30°	15° 15′ 27″	0,3583	— 0,2608
35°	17° 34′ 15″	0,3772	— 0,2402
40°	19° 46′ 27″	0,4001	— 0,2147
45°	21° 50′ 48″	0,4276	— 0,1829
50°	23° 46′ 37″	0,4602	— 0,1433
55°	25° 32′ 22″	0,4986	— 0,09412
60°	27° 7′ —″	0,5426	— 0,03256
65°	28° 29′ 26″	0,5961	+ 0,04515
70°	29° 38′ 33″	0,6568	+ 0,1444
75°	30° 33′ 22″	0,7268	+ 0,2730
80°	31° 13′ 11″	0,8069	+ 0,4432
85°	31° 37′ 20″	0,8978	+ 0,6744
88°	31° 44′ 9″	0,9577	+ 0,8553
89°	31° 45′ 6″	0,9786	+ 0,9249
89° 30′	31° 45′ 20″	0,9893	+ 0,9618
90°	31° 45′ 26″	1	+ 1

$n = 2{,}0.$

0°	0	0,3333	— 0,3333
3°	1° 29′ 58″	0,3338	— 0,3329
5°	2° 29′ 52″	0,3346	— 0,3320
10°	4° 58′ 51″	0,3385	— 0,3282
15°	7° 26′ 8″	0,3449	— 0,3216
20°	9° 50′ 48″	0,3542	— 0,3121
25°	12° 11′ 57″	0,3662	— 0,2993
30°	14° 28′ 39″	0,3811	— 0,2829
35°	16° 39′ 57″	0,4010	— 0,2620
40°	18° 44′ 50″	0,4250	— 0,2360
45°	20° 42′ 18″	0,4514	— 0,2038
50°	22° 31′ 15″	0,4838	— 0,1638
55°	24° 10′ 36″	0,5217	— 0,1141
60°	25° 39′ 32″	0,5657	— 0,05186
65°	26° 56′ 48″	0,6168	+ 0,02661
70°	28° 1′ 29″	0,6754	+ 0,1268
75°	28° 52′ 44″	0,7425	+ 0,2570
80°	29° 29′ 55″	0,8185	+ 0,4296
85°	29° 52′ 27″	0,9043	+ 0,6652
88°	29° 58′ 49″	0,9605	+ 0,8508
89°	29° 59′ 41″	0,9801	+ 0,9225
89° 30′	29° 59′ 55″	0,9900	+ 0,9605
90°	30° —′ —″	1	+ 1

$n = 1{,}6$

i	r	$-\sigma_{\prime\prime}$	$-\sigma_{\perp}$
0°	0°	0,2308	— 0,2308
3°	1° 52′ 29″	0,2312	— 0,2304
5°	3° 7′ 21″	0,2319	— 0,2297
10°	6° 13′ 50″	0,2352	— 0,2263
15°	9° 18′ 34″	0,2409	— 0,2206
20°	12° 20′ 34″	0,2491	— 0,2123
25°	15° 18′ 56″	0,2600	— 0,2011
30°	18° 12′ 36″	0,2740	— 0,1866
35°	21° —′ 25″	0,2917	— 0,1680
40°	23° 41′ 15″	0,3133	— 0,1447
45°	26° 13′ 42″	0,3400	— 0,1155
50°	28° 36′ 18″	0,3721	— 0,07896
55°	30° 47′ 41″	0,4111	— 0,03305
60°	32° 51′ 18″	0,4568	+ 0,02557
65°	34° 30′ 10″	0,5146	+ 0,09859
70°	35° 58′ —″	0 5821	+ 0,1932
75°	37° 8′ 14″	0,6628	+ 0.3163
80°	37° 59′ 19″	0,7579	+ 0,4787
85°	38° 30′ 26″	0,8698	+ 0,6975
88°	38° 39′ 16″	0,9457	+ 0,8665
89°	38° 40′ 30″	0,9724	+ 0,9309
89° 30′	38° 40′ 49″	0,9861	+ 0,9649
90°	38° 40′ 56″	1	+ 1

$n = 1{,}7$

i	r	$-\sigma_{\prime\prime}$	$-\sigma_{\perp}$
0°	0°	0,2593	— 0,2593
3°	1° 45′ 51″	0,2597	— 0,2588
5°	2° 56′ 20″	0,2604	— 0,2581
10°	5° 51′ 46″	0,2639	— 0,2546
15°	8° 45′ 21″	0,2699	— 0,2485
20°	11° 36′ 23″	0,2785	— 0,2398
25°	14° 23′ 40″	0,2900	— 0,2280
30°	17° 6′ 16″	0,3046	— 0,2127
35°	19° 43′ 5″	0,3229	— 0,1933
40°	22° 13′ —″	0,3452	— 0,1690
45°	24° 34′ 45″	0,3723	— 0,1387
50°	26° 46′ 58″	0,4050	— 0,1008
55°	28° 48′ 22″	0,4440	— 0,05339
60°	30° 37′ 31″	0,4906	+ 0,006143
65°	32° 13′ —″	0,5458	+ 0,08155
70°	33° 33′ 25″	0,6110	+ 0,1781
75°	34° 37′ 27″	0,6878	+ 0,3032
80°	35° 34′ 3″	0,7761	+ 0,4691
85°	35° 52′ 23″	0,8810	+ 0,6908
88°	36° 0′ 25″	0,9505	+ 0,8634
89°	36° 1′ 30″	0,9749	+ 0,9290
89° 30′	36° 1′ 47″	0,9874	+ 0,9640
90°	36° 1′ 53″	1	+ 1

$n = 1{,}8$

i	r	$-\sigma_{\prime\prime}$	$-\sigma_{\perp}$
0°	0°	0,2857	— 0,2857
3°	1° 39′ 58″	0,2862	— 0,2853
5°	2° 46′ 31″	0,2869	— 0,2845
10°	5° 32′ 10″	0,2906	— 0,2808
15°	8° 16′ 2″	0,2968	— 0,2745
20°	10° 57′ 13″	0,3057	— 0,2655
25°	13° 34′ 45″	0,3175	— 0,2532
30°	16° 7′ 40″	0,3326	— 0,2374
35°	18° 34′ 54″	0,3512	— 0,2174
40°	20° 55′ 22″	0,3740	— 0,1923
45°	23° 7′ 54″	0,4014	— 0,1611
50°	25° 11′ 14″	0,4341	— 0,1223
55°	27° 4′ 12″	0,4729	— 0,07385
60°	28° 45′ 32″	0,5188	— 0,01314
65°	30° 13′ 57″	0,5726	+ 0,06357
70°	31° 28′ 14″	0,6356	+ 0,1616
75°	32° 27′ 15″	0,7088	+ 0,2886
80°	33° 10′ 10″	0,7933	+ 0,4562
85°	33° 36′ 13″	0,8901	+ 0,6830
88°	33° 43′ 35″	0,9544	+ 0,8595
89°	33° 44′ 35″	0,9770	+ 0,9272
89° 30′	33° 44′ 51″	0,9884	+ 0,9629
90°	33° 44′ 57″	1	+ 1

$n = 2{,}2$

i	r	$-\sigma_{\prime\prime}$	$-\sigma_{\perp}$
0°	0	0,3750	— 0,3750
3°	1° 21′ 47″	0,3755	— 0,3746
5°	2° 16′ 14″	0,3763	— 0,3737
10°	4° 31′ 38″	0,3802	— 0,3697
15°	6° 45′ 23″	0,3868	— 0,3630
20°	8° 56′ 38″	0,3963	— 0,3533
25°	11° 4′ 31″	0,4087	— 0,3403
30°	13° 8′ 12″	0,4243	— 0,3235
35°	15° 6′ 46″	0,4433	— 0,3023
40°	17° 1′ 44″	0,4652	— 0,2750
45°	18° 44′ 55″	0,4932	— 0,2432
50°	20° 22′ 39″	0,5248	— 0,2027
55°	21° 51′ 36″	0,5614	— 0,1524
60°	23° 10′ 54″	0,6035	— 0,08951
65°	24° 19′ 43″	0,6518	— 0,01007
70°	25° 17′ 11″	0,7066	+ 0,09161
75°	26° 2′ 37″	0,7684	+ 0,2242
80°	26° 35′ 34″	0,8378	+ 0,4013
85°	26° 59′ 29″	0,9147	+ 0,6465
88°	27° 1′ 7″	0,9650	+ 0,8413
89°	27° 1′ 53″	0,9823	+ 0,9174
89° 30′	27° 2′ 5″	0,9911	+ 0,9578
90°	27° 2′ 10″	1	+ 1.

$n = 2{,}4$

i	r	$-\sigma_{\parallel}$	$-\sigma_{\perp}$
0°	0	0,4118	— 0,4118
3°	1° 14′ 58″	0,4123	— 0,4114
5°	2° 4′ 52″	0,4131	— 0,4105
10°	4° 8′ 57″	0,4170	— 0,4065
15°	6° 11′ 27″	0,4237	— 0,3997
20°	8° 11′ 35″	0,4331	— 0,3900
25°	10° 8′ 32″	0,4455	— 0,3769
30°	12° 1′ 29″	0,4610	— 0,3600
35°	13° 49′ 37″	0,4798	— 0,3388
40°	15° 32′ 7″	0,5023	— 0,3123
45°	17° 8′ 7″	0,5287	— 0,2795
50°	18° 36′ 49″	0,5593	— 0,2389
55°	19° 57′ 24″	0,5946	— 0,1885
60°	21° 9′ 7″	0,6348	— 0,1254
65°	22° 11′ 13″	0,6804	— 0,04552
70°	23° 3′ 2″	0,7318	+ 0,05705
75°	23° 43′ 58″	0,7871	+ 0,1950
80°	24° 13′ 34″	0,8530	+ 0,3727
85°	24° 31′ 28″	0,9232	+ 0,6261
88°	24° 36′ 31″	0,9685	+ 0,8313
89°	24° 37′ 13″	0,9841	+ 0,9119
89° 30′	24° 37′ 24″	0,9920	+ 0,9550
90°	24° 37′ 28″	1	+ 1.

Tafel I.

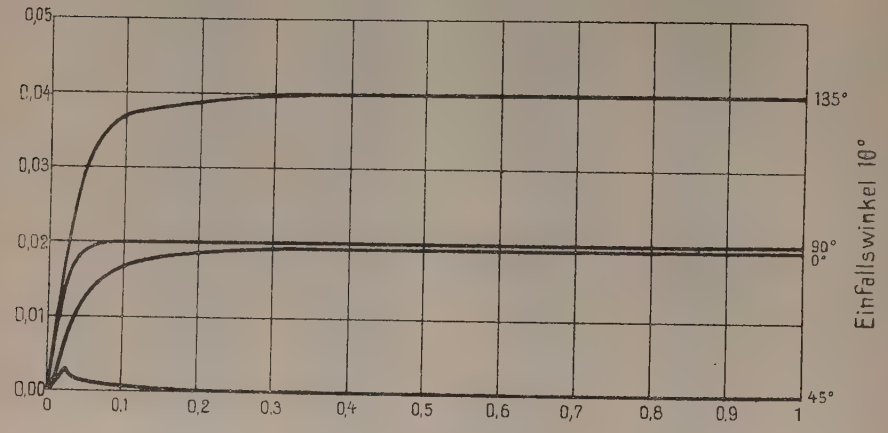


Fig. 1.

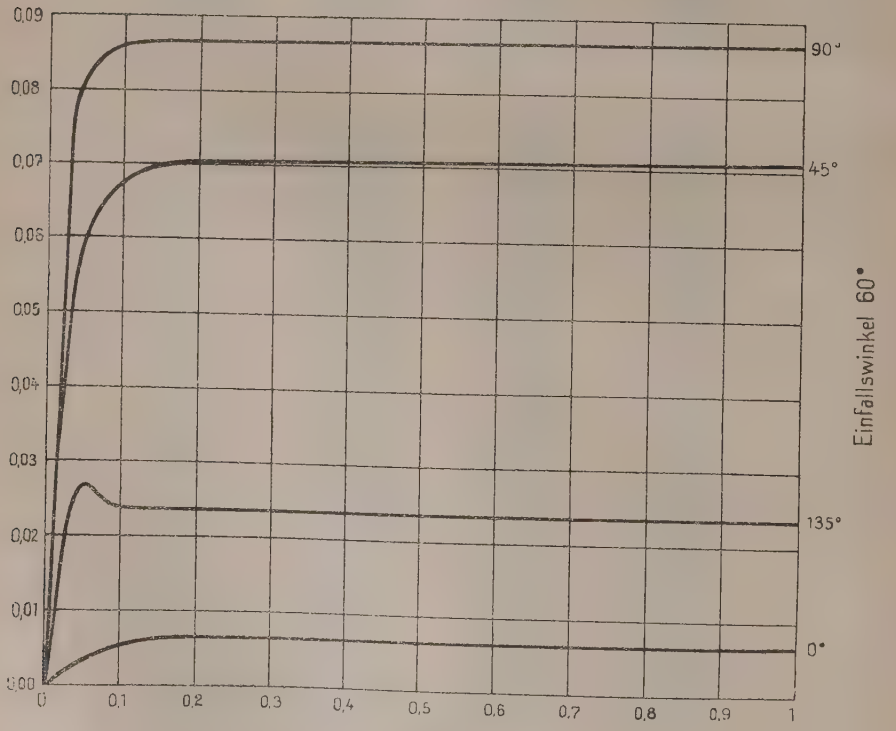


Fig. 2.

Tafel I.

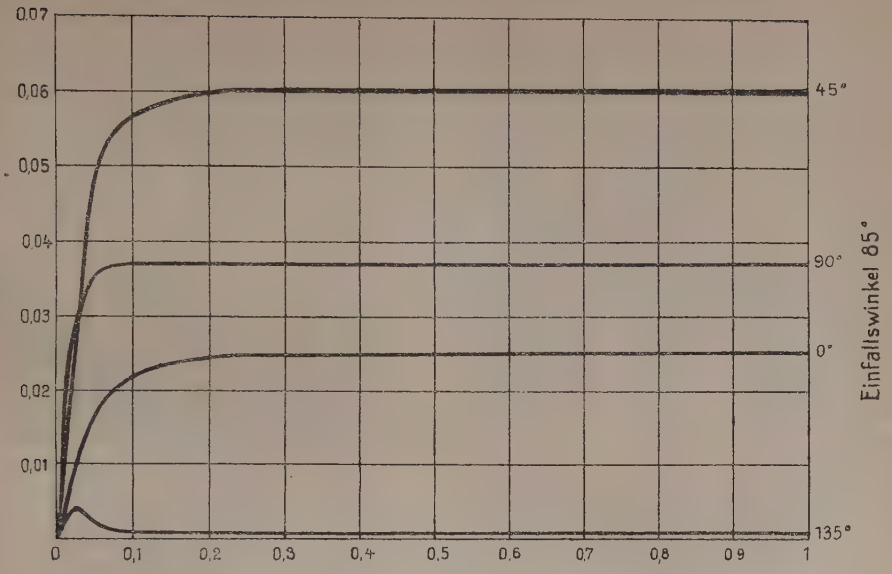
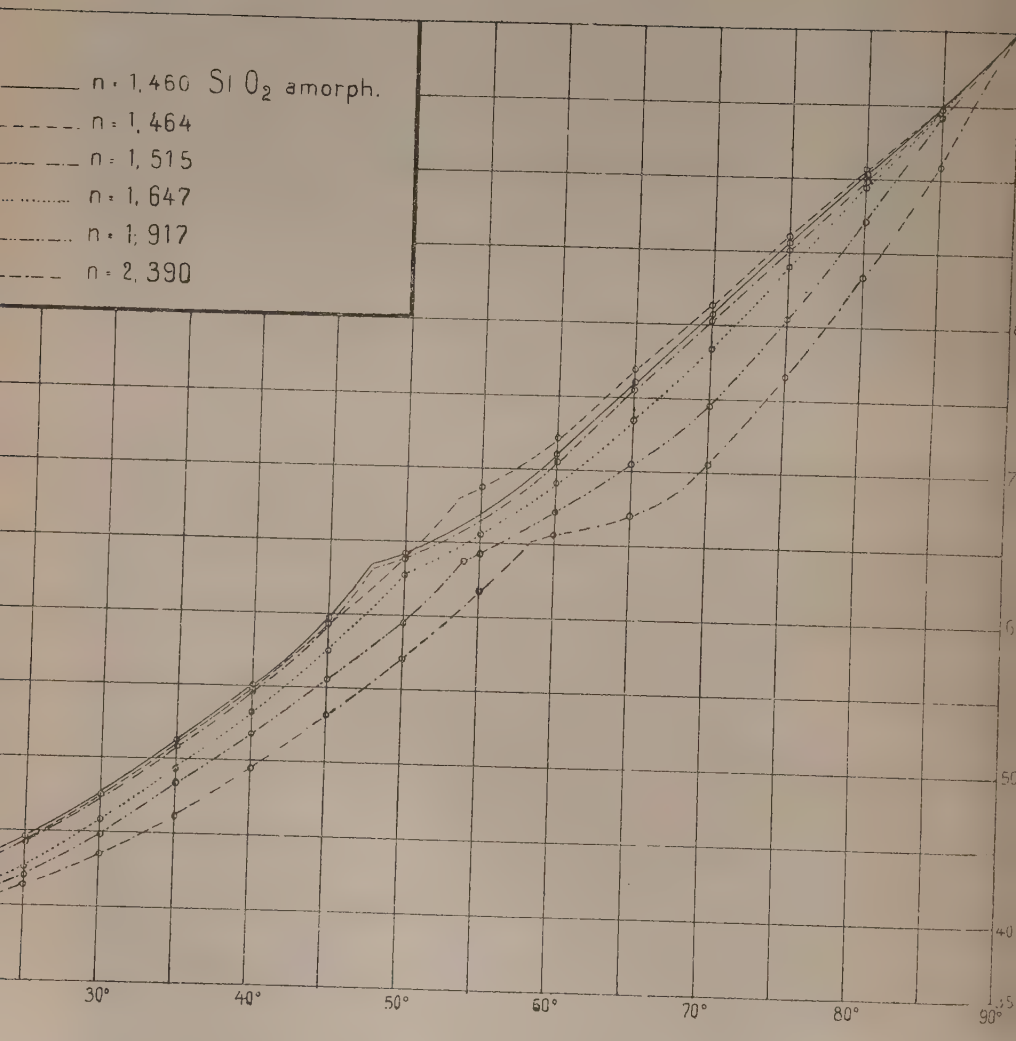

0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0 9
1
45°
90°
0°
135°
Einfallswinkel 85°

Fig. 3.

Tafel II.


n = 1,460 Si O2 amorph.
n = 1,464
n = 1,515
n = 1,647
n = 1,917
n = 2,390
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°

Tafel III.

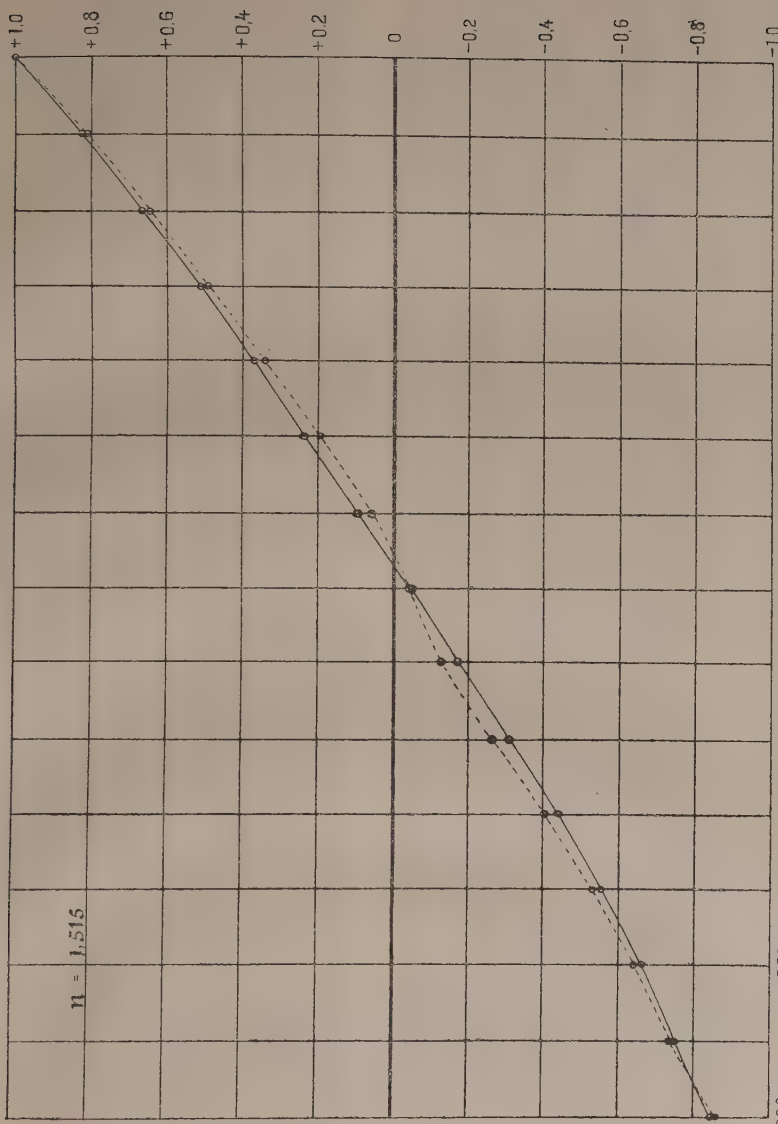


Fig. 1.

Tafel III.

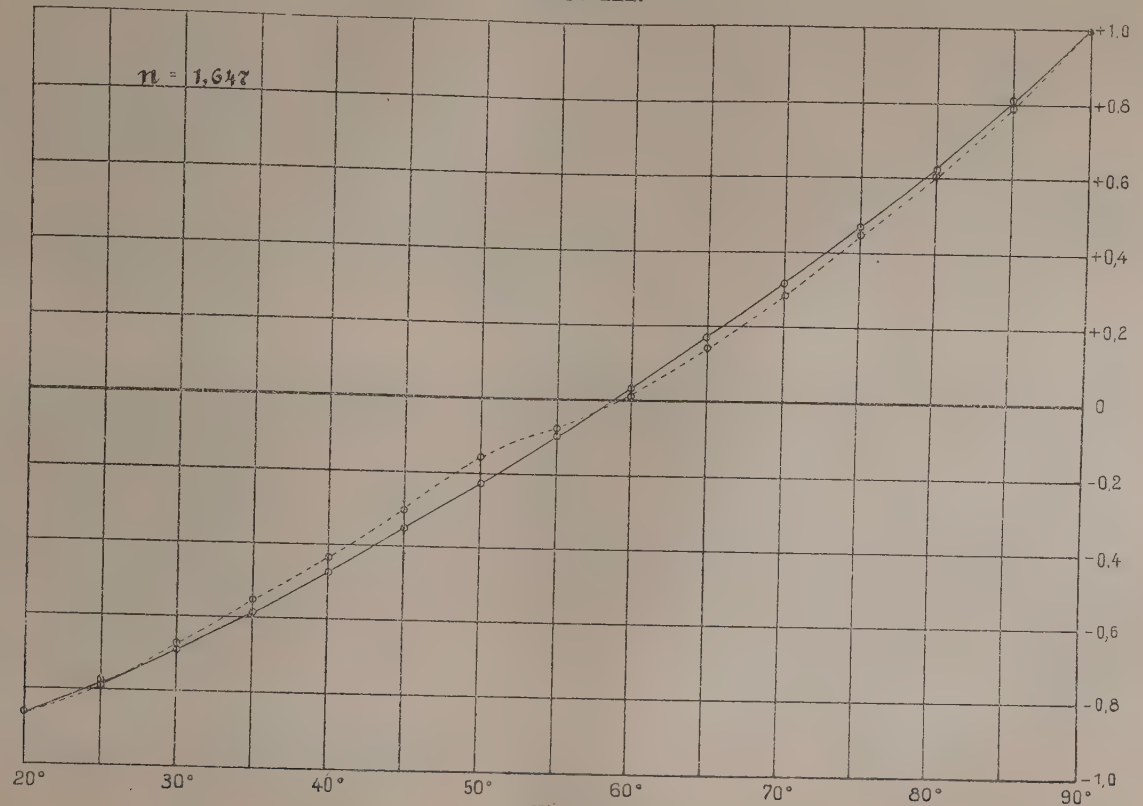


Fig. 2.

Tafel IV.

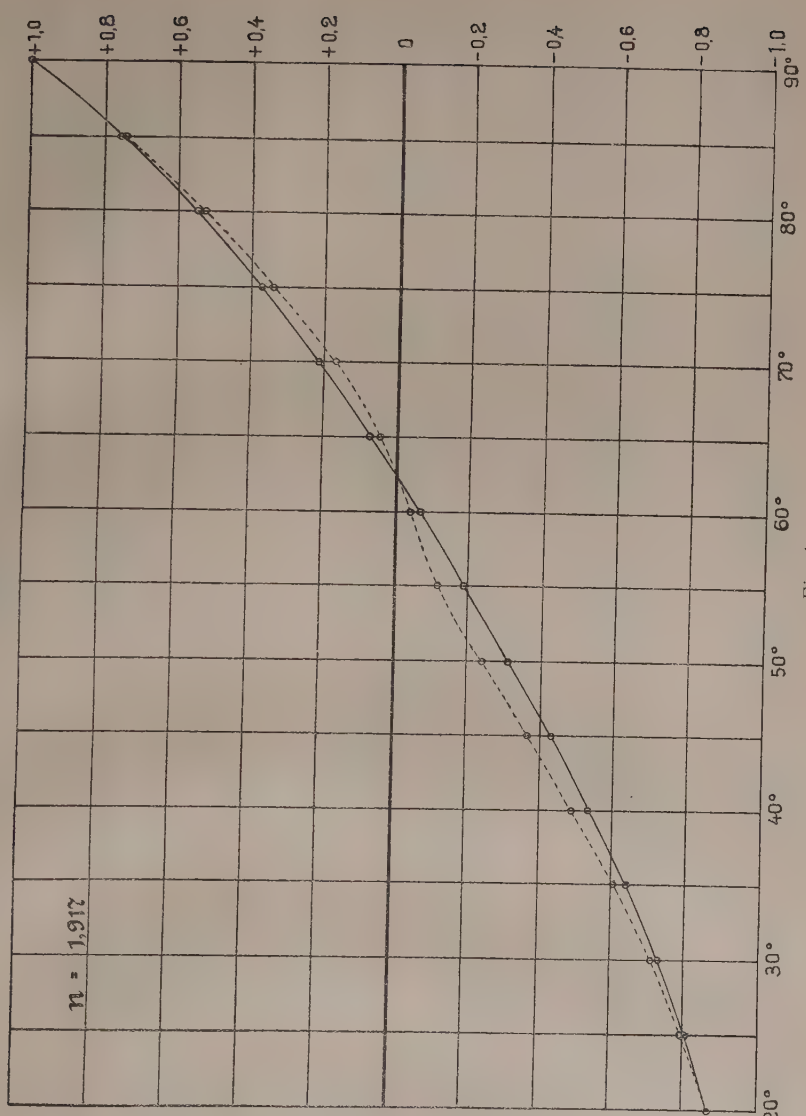


Fig. 1.

Tafel IV.

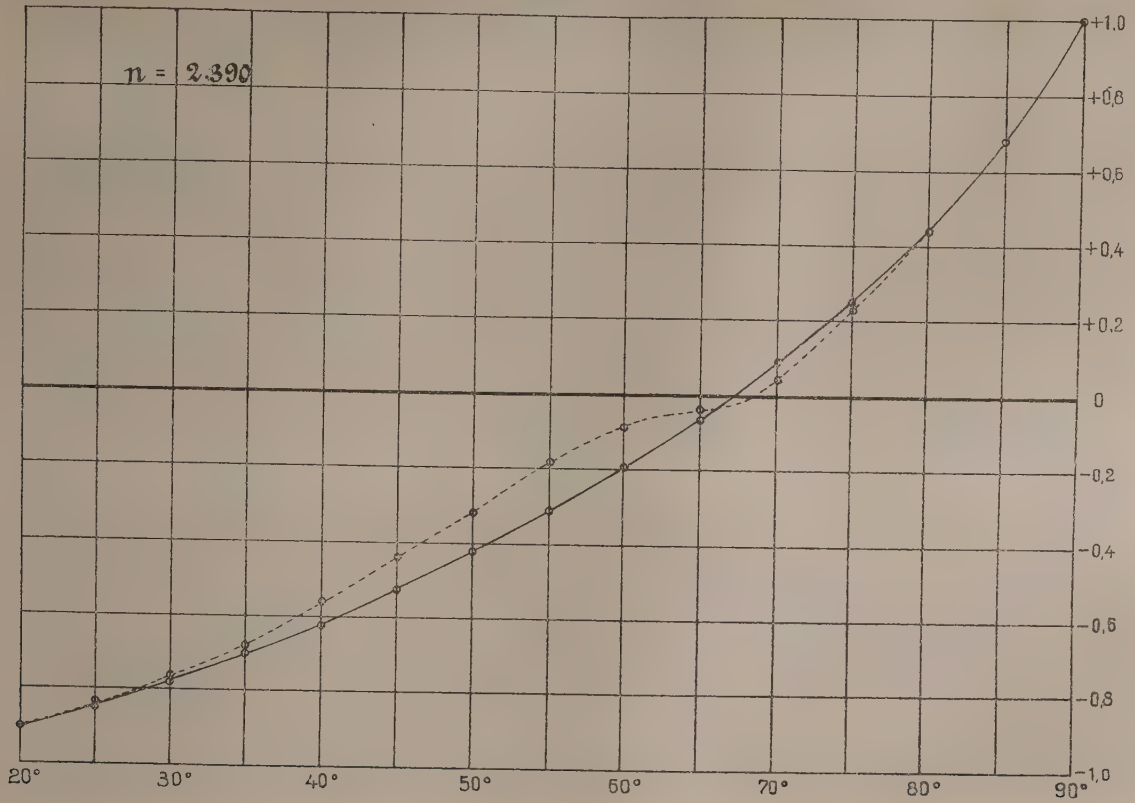


Fig. 2.

Tafel V.

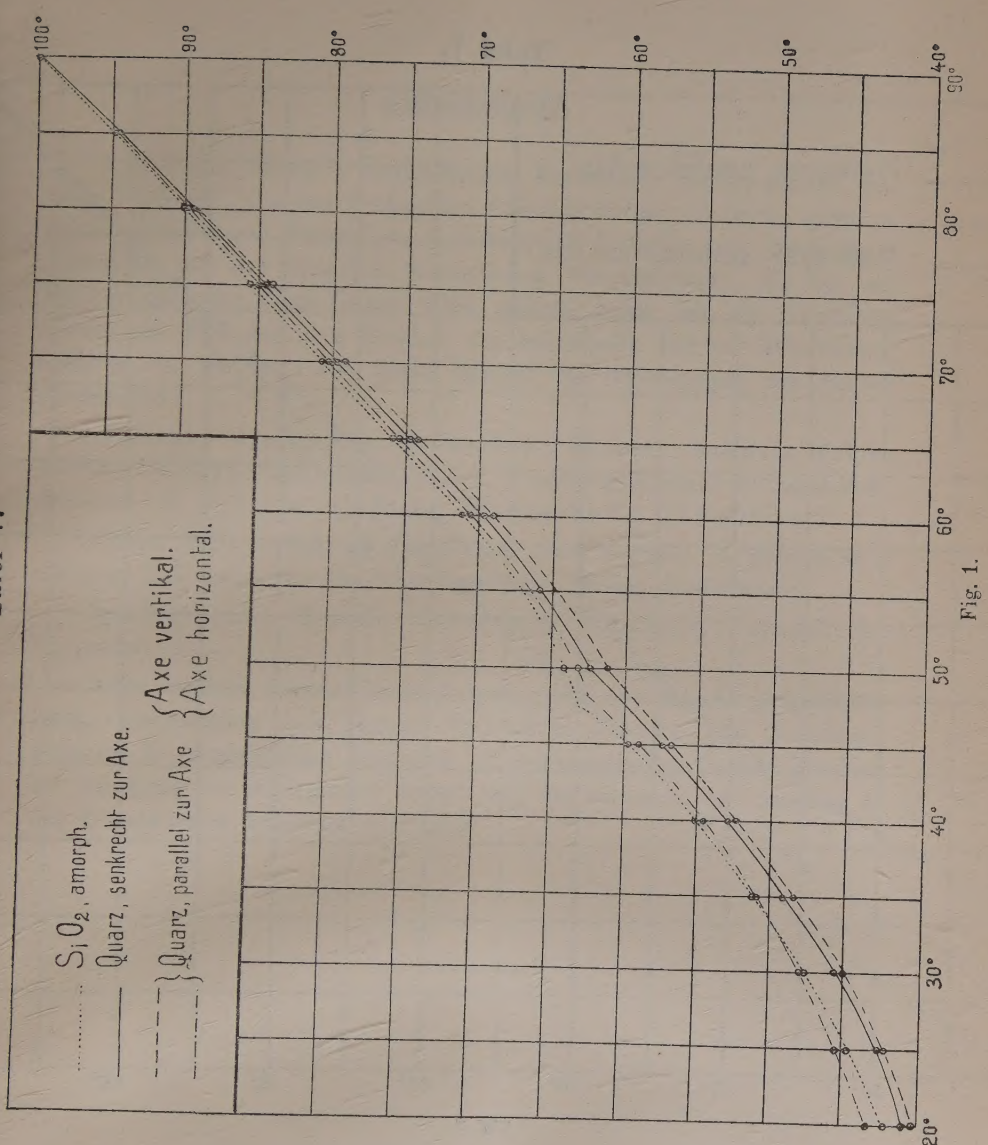

SiO_2, amorph.
Quarz, senkrecht zur Axe.
Quarz, parallel zur Axe
Axe vertikal.
Axe horizontal.
100°
90°
80°
70°
60°
50°
40°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°

Fig. 1.

Tafel V.

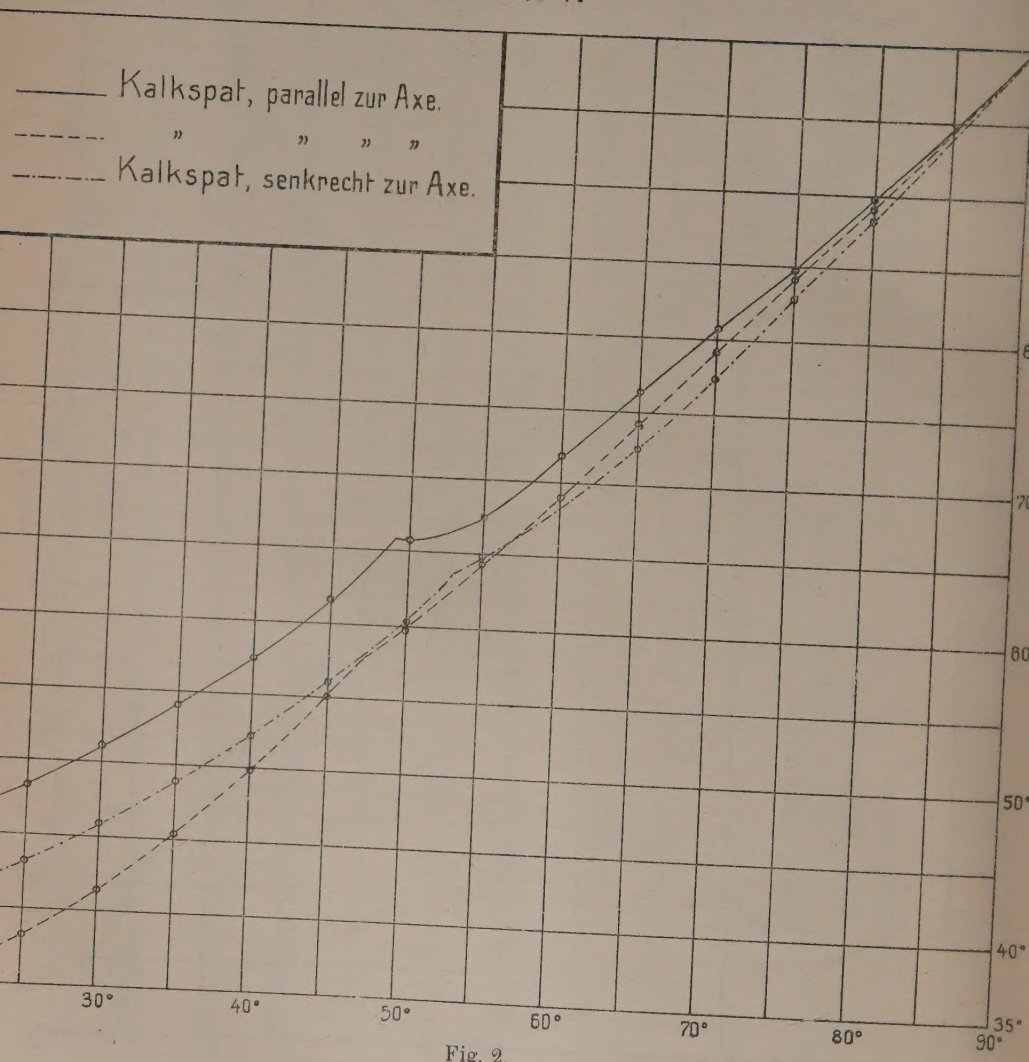

Kalkspat, parallel zur Axe.
" " " "
Kalkspat, senkrecht zur Axe.
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
40°
35°

Fig. 2.

Lebenslauf.

Ich, Hans Schulz, evangelischer Konfession, wurde am 15. Oktober 1885 als Sohn des Prokuristen Reinhold Schulz in Berlin geboren. Nach sechsjährigem Besuch der II. Realschule in Berlin und dreijährigem Aufenthalt auf der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, die ich mit dem Zeugnis der Reife Ostern 1904 verließ, bezog ich die Universität Berlin, um mich dort dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu widmen. Ich hörte daselbst die Vorlesungen der Herren Professoren:

Gehrke, Grunmach, Grüneisen, Hettner, Jahnke, Knoblauch, Landau, Lehmann-Filhés, Paulsen, Plank, Pringsheim, Rubens, H. A. Schwarz, Slaby, Wahnschaffe, Weinstein.

Ostern 1906 verließ ich Berlin, um mein Studium in Breslau fortzusetzen und hörte dort die Vorlesungen der Herren Professoren:

Baumgartner, Hintze, Ladenburg, Lummer, Pringsheim, Schaefer.

Allen meinen hochverehrten Lehrern sage ich meinen tiefgefühlten Dank, insbesondere den Herren Professoren Jahnke und Lummer, ersterem für mannigfaltige Anregung auf mathematischem Gebiet, letzterem für Anregung zu vorliegender Arbeit und das Interesse, mit welchem er das Fortschreiten derselben wahrnahm.